

VĚDECKÝ ČASOPIS

ZEMĚDĚLSKÁ EKONOMIKA

12

ROČNÍK 11 (XXXVIII)
PRAHA,
PROSINEC 1965
CENA 10 Kčs

ÚSTAV
VĚDECKOTECHNICKÝCH
INFORMACÍ MZLVH

Rídí redakční rada

Doc. Karel Svoboda, CSc. (předseda), Josef Drahovzal, prof. dr. Alois Grolig, CSc., inž. Jaromír Havlíček, CSc., dr. inž. Alois Hrubeš, doc. inž. Felix Hutník, CSc., doc. Dimitrij Choma, CSc., doc. inž. Josef Krilek, CSc., doc. inž. Jaroslav Píč, CSc., doc. inž. Ladislav Sobotka, CSc., Otto Soukup, CSc., doc. inž. Mikuláš Šebesta, CSc., Miroslav Zich

Vedoucí redaktor Bohuslav Vávra

© Ústav vědeckotechnických informací MZLVH, Praha 1965

■
Vědecký časopis ZEMĚDELSKÁ EKONOMIKA uveřejňuje studie, rozborů a vědecká pojednání o vyřešených úkolech výzkumu v oboru zemědělské ekonomiky. Vydává Ústav vědeckotechnických informací ministerstva zemědělství, lesního a vodního hospodářství. Vychází měsíčně. Redakce: Praha 2, Slezská 7, telefon 224181. Celoroční předplatné Kčs 120,—

■
Научный журнал ЗЕМЕДЕЛЬСКАЯ ЭКОНОМИКА публикует обзоры, анализы и научные статьи о разрешенных заданиях по научному исследованию в области экономики сельского хозяйства. Издает Институт научно-технической информации Министерства сельского, лесного и водного хозяйства. Выход в свет ежемесячно. Редакция Прага 2, Слезска 7

■
The scientific journal ZEMĚDELSKÁ EKONOMIKA publishes studies, analyses and scientific treatises about the solved research tasks in the line of the agricultural economics. Published by the Institute of Scientific and Technical Information of the Ministry of Agriculture, Forestry and Water Management. Issued monthly. Editorial office Prague 2, Slezska 7

■
Die wissenschaftliche Zeitschrift ZEMĚDELSKÁ EKONOMIKA veröffentlicht Studien, Analysen und wissenschaftliche Abhandlungen über die gelösten Forschungsaufgaben vom Institut für wissenschaftlich-technische Informationen des Ministeriums für Land-, Forst- und Wasserwirtschaft. Erscheint monatlich. Redaktion Prag 2, Slezská 7

■
Le journal scientifique ZEMĚDELSKÁ EKONOMIKA publie les études, analyses et traités scientifiques concernant les tâches de recherches résous dans le domaine d'économie agricole. Publié par l'Institut des renseignements scientifiques et techniques du Ministère de l'agriculture, des eaux et des forêts. Paraît une fois par mois. Rédaction Prague 2, Slezska 7

■ Pre ekonomiku socialistického zriadenia je plánovanie charakteristickou črtou. Zostaviť a realizovať správny národohospodársky plán možno iba vtedy, ak základom plánovacích čísiel je reálne bilancovanie daných podkladov, a ďalej, ak sa výrobné plány národohospodárskych odvetví zostavia tak, aby ich finálna produkcia kryla potreby štátu (vnútorná potreba, export).

Polnohospodársku výrobu ovplyvňujú do značnej miery, okrem ekonomických činiteľov, aj prírodné podmienky; hlavný vplyv má základný výrobný prostriedok — pôda a jej úrodnosť. Táto skutočnosť sa nevzťahuje iba na možnosť pestovania určitých plodín v daných oblastiach, ale ovplyvňuje napr. i voľbu správnej agrotechniky apod. To zase môže vplývať už aj na primeranú výšku investícií (technické vybavenie, melioračné opatrenia atď.).

Pri vypracovaní štátnych, územných a podnikových plánov v poľnohospodárstve sa v našej vlasti používali a používajú rôzne metódy, ktoré sa vytvorili buď na základe vedeckého výskumu, alebo podľa plánovacej praxe.

Všeobecne majú plánovacie metódy ten nedostatok, že doposiaľ mali plánovacie orgány z potrebných základných údajov (faktorov) k dispozícii iba niektoré exaktne merateľné údaje. Tento nedostatok sa vynára najmä v súvislosti s vlastnosťami pôdy.

V rámci výskumnej úlohy „*Rajonizácia poľnohospodárskej výroby*“ sme sa snažili o zameranie a zohľadnenie prírodných činiteľov, čo je jednou z organických častí uvedeného problému. Tým chceme poskytnúť poľnohospodárskemu plánovaniu údaje, ktoré v tejto oblasti doteraz neboli k dispozícii.

Vzhľadom na veľkú rozvetvenosť práce museli sme výskum uskutočniť postupne. Pri hodnotení vplyvu prírodných činiteľov na výsledky výroby sme potrebovali pôdne mapy, meteorologické a hydrologické údaje, stanovenie stanovištných podmienok plodín a ešte mnohé iné základné materiály. Museli sme preto uvážiť, či pre naše ciele vyhovuje prehľadná pôdna mapa štátu (Kreybigova mapa), ktorá je k dispozícii. Pokus s použitím tejto mapy byl bezúspešný, a preto sme boli nútení rozhodnúť sa vypracovať nové mapy, s použitím správnych údajov jestvujúcej mapy. Nové mapy obsahujú podrobnejší systém vysvetliviek ako zmienená mapa. Vypracovali sme jednotný systém pre zostavenie praktických poľnohospodárskych pôdnych máp v mierke 1 : 25 000. Pri vypracovaní tohto systému sme usilovali o znázornenie tých prírodných činiteľov, ktoré najviac pôsobia na vývoj rastlín. Vzhľadom na to, že štatistické údaje o výrobe sme mali k dispozícii podľa obcí, ako najmenej výrobnej jednotky, zostavili sme aj mapy podľa obcí. Mapovanie sme vykonali v rokoch 1958—1961 vo všetkých správnych jednotkách štátu (3267 miest a obcí).

Súbežne s pôdnym mapovaním sme vypracovali vlastný systém využitia pôd. Pomocou tohto systému sme zatriedili každé výrobné odvetvie podľa najcharakteristickejších predpokladov využitia (2). Pri triedení odvetvia rastlinnej výroby na ornej pôde sme použili napr. ako charakteristiku skupinu plodín zostavenú z troch plodín. Z týchto troch plodín je hlavná plodina vždy obilovina (pšenica, raž, ovos); prvá vedľajšia plodina je priemyselná alebo krmovinná kultúra (cukrovka, kukurica, zemiaky, slnečnica); druhá vedľajšia plodina je ďatelinovina, najčastejšie viacročná krmovina (napr. lucerna, ľadenec rožkatý atď.). Podľa tohto systému sme zatriedili ornú pôdu do 21 typov, lúky do 9, pasienky do 5, ovocné sady do 8 a vinohrady do 3 typov, tj. poľnohospodársku

I. Triedenie využitia pôd pre odvetvie obilovín a podiel pôd podľa tried využitia z celoštátnej vymery ornej pôdy

Číslo	Trieda využitia pôdy charakteristická plodina	Podiel z ornej pôdy štátu v %
1.1	Pšenica — cukrová repa — lucerna	23,8
1.2	Pšenica — kukurica — červená ďatelina	37,7
1.3	Pšenica — cukrová repa — hrachor	3,1
1.4	Pšenica — cukrová repa — hrachor	3,9
1.5	Pšenica — zemiaky — vičenec	3,4
1.6	Pšenica — zemiaky — ľadenec rožkatý	1,7
	Pšeničná pôda	73,6
2.1	Raž — kukurica — červená ďatelina	2,5
2.2	Raž — kukurica — vičenec	1,2
2.3	Raž — kukurica — komonica	1,7
2.4	Raž — zemiaky — komonica	3,5
2.5	Raž — zemiaky — lupina	4,2
2.6	Raž — zemiaky — vičenec	1,5
2.7	Raž — zemiaky — ľadenec rožkatý	1,7
2.8	Raž — zemiaky — inkarnát	2,5
2.9	Raž — slnečnica — vika	2,7
2.9a	Raž — vika	0,5
2.10	Raž — zemiaky — červená ďatelina	1,5
	Ražná pôda	23,5
3.1	Ovos — zemiaky — inkarnát	0,7
3.2	Ovos — zemiaky — vičenec	0,4
3.3	Ovos — konope — čalamáda	1,2
3.4	Ovos — zemiaky — ľadenec rožkatý	0,6
	Ovsená pôda	2,9
		100,0

pôdu celkom do 46 typov, poľažne subtypov. Triedenie využitia pôd pre odvetvie obilovín uvádzame na tabuľke I. Pre informáciu uvádzame v tejto tabuľke aj podiel pôd podľa tried využitia z celoštátnej výmery ornej pôdy.

Toto zatriedenie poľnohospodárskej pôdy nemožno, samozrejme, považovať za konečné, pretože zlepšováním výrobných podmienok (obrátenie pôdy, meliorácie, zvýšené dávky umelých hnojív) sa jednotlivé pôdne typy primerane zlepšujú. Tieto zmeny si však, podľa našej mienky, vyžadujú dlhší čas a práve preto zatiaľ netreba hovoriť o úprave zatriedenia.

Domnievam sa, že môžem upustiť od ďalšieho podrobného vysvetľovania systému a postačí, ak na niekoľkých príkladoch poukážem na podstatu použitej metódy. Pre pôdny typ využívaný v triede pšenica—cukrová repa—lucerna je vždy charakteristický usporiadaný režim vápnika, dobrá štruktúra, hlboká ornica a vyhovujúci stav živín. Pôda v triede pšenica—cukrová repa—vičenec je silne zväpnená, má podstatne horšiu štruktúru ako pôda v predchádzajúcej triede, stav živín je nevyhovujúci, vodný režim je tu tiež podstatne horší a súčasne možno predpokladať, že ani vrstva ornice nie je bezchybná. Pôda v triede raž—zemiaky—lupina sa skladá z kyslého sirnatého piesku s nižšou hodnotou živín a má špecifický vodný režim.

Zatriedenie lúk a pastvín sa uskutočnilo so zohľadnením polohy terénu a chemických vlastností pôdy, pretože napr. pri horských pastvinách na kyslých pôdach môžeme rátať s nižšími výnosmi a ďalej, vzhľadom na vnútorné zloženie stavu pastvín, zodpovedajúce chemickým vlastnostiam pôdy, aj s menej kvalitnými trávami ako na nížinných lúkach s usporiadaným režimom vápnika.

Pri zatriedení vinohradov sme prevzali členenie z monografickej práce Výskumného ústavu vinohradníckeho. Vinohradnícke územie sme charakterizovali podľa toho, či sa výsadba kultúr uskutočnila na prvotriednej, druhotriednej alebo nevhodnej pôde. Veľké ovocné sady sme charakterizovali podľa vysadených ovocných druhov, s prihliadnutím na to, že výsadba väčšiny týchto ovocných sádov sa uskutočnila už podľa plánu zostaveného na základe miestneho prieskumu.

Pre doplnenie poznamenávam, že pri triedení využitia pôd v odvetví rastlinnej výroby na ornej pôde nepoukazujeme na súčasný stav, ale iba na možnosti využitia. Vo väčšine prípadov sú ovšem obidve uvedené hľadiská totožné.

V odvetví rastlinnej výroby na ornej pôde sme vypracovali pre každú triedu využitia pôd aj možnosti ich využitia tým, že sme všetky plodiny zatriedili do dvoch skupín (prvotriedne a druhotriedne plodiny). Ako kritérium zatriedenia plodín nám slúžila skutočnosť, či na príslušnej pôde možno patričnú plodinu dopestovať s plným úspechom (prvotriedne plodiny). Zatriedovali sme aj podľa zrážkových pomerov: pre suchšie i daždivejšie klimatické podmienky. Pochôdzkou obcí na tvári miesta sme pomocou pôdných máp klasifikovali poľnohospodársku pôdu podľa honov, prípadne i tabiel. Výsledky klasifikácie sme na mape využitia pôd zobrazili v mierke 1 : 25 000. Mapovalo sa podľa jednotného systému, čo umožňuje porovnávať z hľadiska možnosti využitia územia, ktoré sa nachádzajú na rôznych miestach štátu.

Meraním máp obcí (planimetriou atď.) sme stanovili mieru pôdných vlastností a využitia pôd. Takto získané údaje sme zaregistrovali do katastrov pôdných vlastností, poľažne katastrov využitia pôd. Konečné zaradenie obcí z hľadiska okresov, žúp a štátu poskytujú riadiacim orgánom, z regionálneho hľadiska, podrobnú informáciu.

Pre lepšiu prehľadnosť väčších územných jednotiek a pre kontrolu zaradenia rôznych pôd, znázornených podľa číselných údajov, vypracovali sme podľa

		PŠENIČNÁ PÔDA						RAŽNÁ PÔDA										OVSENÁ PÔDA				
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9a	10	1	2	3	4
CHLEBOVÉ OBILIE	PŠENICA																					
	RAŽ																					
KRMNÉ OBILIE	OZIMNÝ JAČMEŇ																					
	JARNÝ JAČMEŇ																					
	OVOS																					
	KUKURICA																					
STRUKOVINY	HRACH																					
	FAZUĽA																					
	ŠOŠOVICA																					
	SOJA																					
PRIEMYSELNÉ PLODINY	GUKROVÁ REPA																					
	KONOPE																					
	ĽAN ¹																					
	PRIADNY ĽAN ²																					
	SLNEČNICA ³																					
	ČAKANKA ⁴																					
	METLOVÝ CIROK ⁵																					
	TABAK																					
	MAK																					
	RICINUS ⁶																					
OKOPANINY	REPIKA (OZIMNÁ) ⁷																					
	KRMNÁ REPA																					
	ZEMIAKY ⁸																					
	PARADAJKY																					
ZELENINA	PAPRIKA																					
	ČERVENÁ CIBUĽA																					
	KOREŇOVÁ ZELENINA																					
	KAPUSTA																					
	MELÓNY																					
	ČERVENÉ MELÓNY																					
	UHORKY																					
	TEKVICA																					
	KALERÁB																					
	LUCERNA																					
OBJEMOVÉ KRMIVÁ	ČERVENÁ DATELINA																					
	VIČENEC																					
	KOMONICA																					
	INKARNÁT																					
	LUPINA																					
	ĽADENEC ROŽKATÝ																					
	HRACHOR																					
	SUDANSKÁ TRÁVA																					
	BÔLHOJ																					



PRVOTRIEDNA PÔDA
TRETOTRIEDNA PÔDA



DRUHOTRIEDNA PÔDA
VHODNÉ LEN
NA SEMENO



ÚRODNOSŤ URČUJÚ KLIMA-
TICKÉ PODMIENKY, POTAŽNE
MOŽNOSTI ZAVLAŽOVANIA

máp obcí aj prehľadné mapy okresov a žúp v mierke 1 : 100 000. Podľa týchto máp sme napokon vypracovali celoštátnu mapu v mierke 1 : 250 000.

Údaje katastra využitia pôd nemožno využiť pri plánovaní priamo. Preto sme pre ich použiteľnosť spracovali predovšetkým nároky poľnohospodárskych plodín na podmienky prírodných stanovišť. Ďalej sme preskúmali možnosť použitia jednotlivých tried využitia pôd ako prírodné stanovište pre rôzne plodiny. Takto stanovené prírodné stanovištia sme zadelili do stupňov. Plodina sa totiž riadne vyvíja vtedy, ak sú optimálne splnené jej výrobné podmienky, ktoré si nárokuje. Odchýlka od optimálnych podmienok síce ešte neohrozuje výrobný úspech, avšak úmerne od stupňa odchýlky klesá očakávaný výnos plodín. Tie územia, kde sú pre plodiny optimálne výrobné podmienky, sme klasifikovali ako prvotriedne prírodné stanovištia. Na druhej strane tie stanovištia, kde z hľadiska výrobných podmienok je rastlinná výroba možná už iba na hranici rentabilnosti (straty), sme klasifikovali ako tretotriedne. Medzi týmito dvoma triedami sme potom spriemernením stanovili stanovištia druhej triedy. Pôdy zaradené do tried využitia pšenica—cukrová repa—lucerna alebo pšenica—ze-miaky—ľadenec rožkatý zabezpečujú vývojové podmienky pšenice jednako, avšak vo výnosoch a v kvalite produkcie sú už rozdiely. Pôdy pre skupinu pšenica—cukrová repa—lucerna sa v rámci štátu nachádzajú obvykle na miestach so značným počtom slnečných dní, čo zabezpečuje priame ožiarenia plodín, potrebné pre úspešné výnosy. Na druhej strane je pre pôdy v skupine pšenica—ze-miaky—ľadenec rožkatý charakteristický kratší slnečný svit. Na týchto úze-miach sa urodí pšenica s vyššou špecifickou váhou iba v tých rokoch, kedy je v období tvorby bielkovín bezoblačné počasie. Uvedené kvalitatívne rozdiely zapríčiňuje počasie. Okrem toho ovplyvňujú výrobné vlastnosti v uvedenej triede využitia pôdy aj výšku výnosov, medzi iným napr. v tom, že plytká ornica alebo svahovitý terén zapríčiňuje po odtoku vlhky škody spôsobené suchom.

Členenie prírodných stanovišť sme vypracovali pre 43 plodín a naše zistenia zhrňame do tabuľky II.

Územie štátu sme rozdelili podľa územných vodohospodárskych bilancií na 6 klimatických oblastí. Ich umiestnenie znázorňujeme na mape.

Podľa klimatických oblastí sme vypracovali kategórie základných výnosov. Pod pojmom základný výnos rozumieme množstvo produkcie, ktoré možno na príslušnom stanovišti dosiahnuť pri správnom hospodárení (spôsob obrábania pôdy, doba i kvalita výsevu, pravidelná náhrada živín v pôde). Tieto naše zistenia sa vzťahujú na 14 plodín; uvádzame ich v tabuľke III.

II. Stanovištia hospodárskych plodín (k tabuľke na str. 702)

Ako sú zabezpečené stanovištia jednotlivých plodín pri použití tried využitia pôd v odvetví rastlinnej výroby na ornej pôde

- 1 Na Nížine (Alföld)
- 2 Západné Zadunajsko a stredné horské oblasti
- 3 Všeobecne južne od stredných horských oblastí
- 4 V župách Győr-Sopron, Baranya, Somogy a Tolna
- 5 V župách Békés, Bács-Kiskun, Csongrád a v okrese Baranya Mohács
- 6 Južne od priamky Balaton-Mátra-Bükk
- 7 V Zadunajsku
- 8 Na pôde pšenica 2 len v župách Győr-Sopron, Komárom, Vas, Veszprém, Zala, Somogy a Baranya, ďalej v župe Fejér v okresoch Bicske a Mór, v župe Tolna v okresoch Dombóvár, Fehérvár a Bonyhád
- 9 Pšeničná pôda 3,5 len na semeno

III. Kategórie základných výnosov

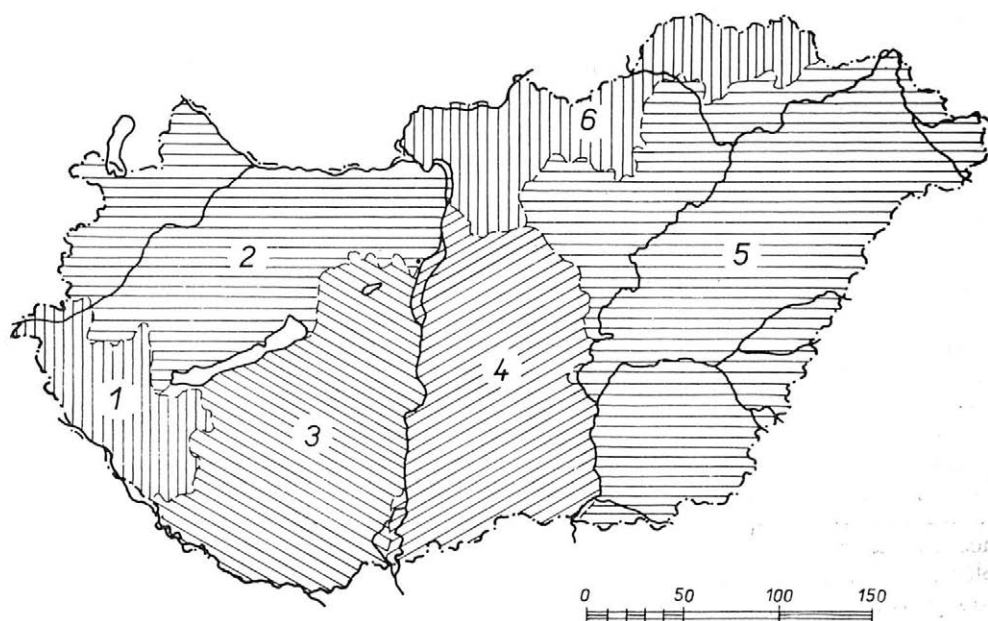
Názov plodiny	Stupeň stano- višta	Západné	Severné	Južné	Územie medzi Dunajom a Tisou	Nížina (Alföld)	Severné Maďarsko
		Zádunajsko					
		q/k. j.)					
Pšenica	I.	9,0	11,0	12,0	11,0	12,0	10,0
	II.	7,5	9,0	9,5	8,0	9,5	7,5
	III.	6,0	7,0	7,0	6,5	7,5	6,0
Raž	I.	8,0	10,0	10,0	9,5	9,0	8,0
	II.	6,0	7,5	8,0	7,0	7,0	6,0
	III.	5,0	6,0	6,0	5,0	5,0	5,0
Ozimný jačmeň	I.	12,0	13,0	14,0	13,0	14,0	12,0
	II.	10,0	11,0	12,0	11,0	12,0	10,0
	III.	8,0	9,0	10,0	9,0	10,0	8,0
Jarný jačmeň	I.	12,0	13,0	13,0	10,0	12,0	12,5
	II.	10,0	11,0	10,0	8,0	10,0	10,0
	III.	8,0	8,0	8,0	6,0	8,0	7,0
Kukurica	I.	15,0	17,0	20,0	18,0	20,0	15,0
	II.	12,0	13,5	16,0	13,5	17,0	12,5
	III.	10,0	10,5	12,0	11,0	14,0	10,0
Zemiaky	I.	80,0	85,0	90,0	70,0	80,0	75,0
	II.	65,0	70,0	70,0	50,0	60,0	50,0
	III.	50,0	45,0	50,0	35,0	40,0	35,0
Slnečnica	I.	7,0	8,0	12,0	11,0	12,0	8,0
	II.	6,0	6,5	8,5	8,0	8,5	6,0
	III.	4,0	5,0	6,0	6,0	6,0	4,5
Cukrová repa	I.	165,0	165,0	150,0	150,0	170,0	140,0
	II.	140,0	130,0	110,0	115,0	140,0	100,0
Ovos	I.	10,0	11,0	12,0	9,0	10,0	9,0
	II.	8,0	9,0	10,0	7,0	8,0	7,5
	III.	7,0	6,5	7,5	5,5	6,0	5,0
Konope	I.	30,0	35,0	40,0	40,0	50,0	30,0
	II.	20,0	25,0	30,0	30,0	35,0	20,0
Kŕmna repa	I.	250,0	230,0	270,0	200,0	250,0	220,0
	II.	200,0	180,0	230,0	150,0	200,0	175,0
Šľachtený hrach	I.	9,0	11,0	14,0	10,0	14,0	9,0
	II.	7,5	9,0	11,0	8,0	11,0	7,5
	III.	6,0	7,0	9,0	6,0	7,5	5,5
Priadny ľan	I.	35,0	30,0	35,0			25,0
Olejný ľan	I.			10,0	9,0	10,0	

Údaje pre výpočet zvýšenia výnosov, ktoré možno dosiahnuť umelými hnojivami, a pre zabezpečenie rastu produkčnej schopnosti plodín závlahami (uskutočňovanými alebo uskutočniteľnými) obsahuje tabuľka IV. Poznnamenávame, že sme pre výpočet možností zvýšenia výnosov umelými hnojivami použili údaje,

IV. Vplyv umelých hnojív a závlah na očakávané zvýšenie výnosov*)

Názov plodiny	Očakávaný zvýšený výnos pri použití 100 kg živín vo forme zmesi umelých hnojív (q/k. j.)	Aký efekt znamená zavlažovanie %
Pšenica (domáce odrôdy)	7,0	—
Raž	5,0	—
Ozimný jačmeň	7,0	—
Jarný jačmeň	7,0	—
Kukurica	4,0	35
Zemiaky	33,0	25
Cukrová repa	55,0	35
Sľnečnica	3,5	—
Silážna kukurica	50,0	30
Lucerna červená ďatelina	13,0	35
Miešaná zelenina	20,0—25,0	30
Ovocie	15,0	25
Vinice	10,0	25

*) Základné údaje o použití umelých hnojív prevzaté od Józsefa Nizsalovszkého



Klimatické oblasti pre stanovenie základných výnosov pri plánovaní odvetvia rastlinnej výroby na ornej pôde podľa uzemí štátu; (Podľa údajov územných vodohospodárskych bilancií zostavil dr. Géczy Gábor)

- | | |
|-----------------------|---------------------------------|
| 1. Západné Zadunajsko | 4. Územie medzi Dunajom a Tisou |
| 2. Severné Zadunajsko | 5. Nížina (Alföld) |
| 3. Južné Zadunajsko | 6. Severné Maďarsko |

ktoré pre tento cieľ vypracoval Jozsef Nizsalovszky. Tieto údaje boli v súlade s výsledkami našich pokusov pri použití umelých hnojív. Aby sme mohli rátať so zvýšením výnosov zavlažovaním, použili sme výsledky výskumných prác vedeckých ústavov príbuzných odvetví a ďalej skúsenosti odborníkov, získané vo výrobnej praxi.

K zisteniu kvality prírodných stanovišť pre hospodárske plodiny z hľadiska jednotlivých tried využitia pôd uskutočnili sme viacročný výskum v roľníckych družstvách okresu Sopron (župa Győr-Sopron).

Odborníci poľnohospodárskeho oddelenia rady ONV vypracovali plán rastlinnej výroby pre poľnohospodárske družstvá už na základe máp využitia pôd. Pri plánovaní sa ešte nepoužili údaje katastru využitia pôd, ale plánovacie čísla rozdelili podľa možností využitia, znázornenými na mape, tj. nepoužili sa absolútne, ale relatívne údaje. I tento spôsob plánovania bol už úspešný, pretože napr. množstvo chlebového obilia dodaného štátu stúplo od roku 1959 za 4 roky z 230 vagónov takmer na štvornásobok (823 vagónov). Prítom i v roku 1962, ktorý bol pre pestovanie obilovín všeobecne nepriaznivý, činil priemerný výnos pšenice v okrese 13,38 q na katastrálne jutro (ďalej len k. j. — celoštátny priemer 9,2 q/k. j.). V tom istom roku činil výnos cukrovej repy, pestovanej na ploche viac ako 3000 k. j., 173 q/k. j.

Prieskumy v okrese Sopron overili aj správnosť vyznačenia stanovišť, pretože ak družstvo neuskutočnilo výsev pšenice podľa dohody s poľnohospodárskym oddelením ONV na vyznačených tabľách, vtedy hektárový výnos klesol. Tak jedno družstvo vysialo väčšinu pšenice do tablí zaradených do triedy raž — zemiaky — ladenec rožkatý. Výnos pšenice v tomto družstve nedosiahol ani 7 q/k. j., hoci v tom istom roku dala pšenica vysiata podľa správneho zatriedenia v tomto družstve 16 q/k. j.

Podľa výsledkov a poznatkov štvorročného výskumu sme vypracovali našu tabuľkovú plánovaciu metódu. Tento systém použili prvý raz pracovníci jedného oddelenia nášho ústavu pre vypracovanie návrhu perspektívneho plánu všetkých výrobných sektorov okresu Kiskörös. Podľa poznatkov získaných pri vypracovaní plánov v tomto okrese sme vypracovali konečnú formu plánovacej metódy.

Pomocou uvedených tabuliek možno zostaviť správny plán plodín pestovaných na ornej pôde pre ktorúkoľvek hospodársku jednotku (podnik, okres atď.).

Plánovací postup znázorňujeme na príklade niekoľkých obcí okresu Gödöllő (peštianska župa). Patrí k predbežnej informácii, že perspektívny výrobný plán týchto obcí vypracovala tradičnými metódami katedra podnikovej ekonomiky Poľnohospodárskej univerzity v Gödöllő. V okrese sme vyznačili 7 obcí, kde sa nachádza takmer celá pôda vo vlastníctve družstiev. U týchto družstiev sme preskúmali z hľadiska možností realizácie vypracované návrhy plánu, potažne sme zostavili nové plány. Preskúmali sme, či je pre predpísané osevné plochy chlebového obilia k dispozícii dostatok prvotriednych stanovišť. Ak sme zistili nedostatok týchto stanovišť, potom sme bilancovali možnosti rozdelenia osevných plôch chlebového obilia medzi obcami tak, aby sa mohol splniť predpísaný výrobný volumen obilia. Hľadali sme také riešenie, ktoré umožňuje rozdelenie výsevu chlebového obilia na prvotriednych stanovištiach medzi obce. Okrem chlebového obilia znázorňujeme plánovanie výroby kukurice a zemiakov a týmto 4 plodinami poukazujeme na možnosti správneho využitia takmer poloviny ornej pôdy.

Podávame tiež informácie o rozdelení obcí podľa kvality ornej pôdy. Obce sa nachádzajú na dvoch, z hľadiska výrobných podmienok, rozdielnych častiach

okresu. Pre znázornenie výrobnéj kapacity odvetvia rastlinnej výroby na ornej pôde sme zoskupili rôzne územia zostavené podľa využitia pôdy, aj z hľadiska ich výrobnéj vhodnosti. Pre tento cieľ sme zostavené triedy, uvedené na tabuľke I, zhrnuli do týchto kvalitatívnych kategórií:

Pre výborné pôdy: triedy: 1.1; 1.2
 Pre dobré pôdy: triedy: 1.3; 2.1; 2.2; 2.3
 Pre stredné pôdy: triedy: 1.5; 1.6; 2.4; 2.5; 2.10; 3.3
 Pre slabé pôdy: triedy: 1.4; 2.6; 2.7; 2.8; 3.1; 3.4
 Pre nevhodné pôdy: triedy: 2.9; 2.9a; 3.2
 Stupne kvality ornej pôdy v obciach znázorňuje tabuľka V.

V. Stupne kvality ornej pôdy v obciach

Merná jednotka: ‰

Obec	Výborný	Dobry	Stredný	Slabý	Nevhodný
Kistarcsa	4,3	26,5	14,2	38,3	16,7
Nagytarcsa	4,8	85,8	5,2	—	4,2
Szada	—	5,6	94,4	—	—
Dány	55,7	5,6	20,5	18,2	—
Valkó	73,0	5,7	15,9	5,4	—
Vácszentlászló	91,2	—	9,8	—	—
Zsámbok	93,4	4,1	2,6	—	—
Skúmané územie	60,5	12,1	18,6	7,4	1,4

Pri skúmaní priemerných údajov z rokov 1951—1957 zisťujeme súvislosť medzi výrobnou kapacitou orných pôd podľa uvedeného zatriedenia a dosiahnutými výnosmi. V tomto období sa na skúmanom území nachádzali organizované veľkopodniky iba sporadicky a poľnohospodárska výroba sa uskutočňovala na malých hospodárstvach pomerne primitívnymi prostriedkami a spôsobmi, na všeobecne nízkej úrovni. Možno teda predpokladať, že dosahované výnosy odzrkadľovali prirodzenú úrodnosť pôdy. Spomenutú súvislosť môžeme zistiť už na prvý pohľad (tab. VI).

Okrem prírodných výrobných podmienok ovplyvnili výšku výnosov aj mnohé národohospodárske činitele. V skúmaných obciach to boli medzi iným: počet

VI. Zrovnanie výnosov vo skúmaných obciach

Merná jednotka: q/k. j.

	Szada	Kistarcsa	Nagytarcsa	Dány	Valkó	Vácszentlászló	Zsámbok
Pšenica	7,2	6,5	8,3	9,4	8,3	7,8	9,2
Cukrová repa	80,0	90,0	110,0	130,0	90,0	100,0	135,0
Ozimný jačmeň	12,4	9,0	11,7	12,6	12,6	14,2	13,2
Kukurica	12,0	9,0	13,5	15,0	11,0	12,0	15,0
Krmná repa	90,0	100,0	170,0	160,0	125,0	160,0	210,0

VII. Podiel zastúpenia osevných plôch v %, celková plocha plodín a výnosy plodín na jednotku plochy a plánované celkové množstvo produkcie

OBCE	Dány	Kis-tarcsa	Nagy-tarcsa	Szada	Valkó	Vác-szent-lászló	Zsámbok	Výmera
Osevná plocha plánovaná tradičným spôsobom					Merná jednotka: %			
Pšenica	15,2	6,0	15,0	4,3	23,2	22,5	24,7	18,2
Raž	12,7	23,2	10,6	28,0	1,0	1,2	—	7,9
Chlebové obilie	27,9	29,2	25,6	32,3	24,2	23,7	24,7	26,1
Kukurica	24,4	25,8	22,5	31,9	25,6	21,3	26,7	25,1
Celková osevná plocha štyroch plodín								
	56,1	63,4	53,0	71,9	55,5	52,5	57,0	57,0
Plánované výnosy plodín					Merná jednotka: q/k. j.			
Pšenica	10,8	8,5	9,5	7,0	10,5	11,6	12,1	11,05
Raž	8,2	7,3	8,0	6,0	8,6	9,1	—	7,35
Kukurica	20,0	14,0	15,0	10,5	22,0	23,0	21,0	19,30
Zemiaky	90,0	62,0	70,0	60,0	82,0	100,0	89,0	84,00
Množstvo produkcie plánované podľa osevných plôch a výnosov					Merná jednotka: vagón			
Pšenica	64,80	5,52	20,14	4,27	72,03	84,22	98,25	349,23
Raž	41,00	18,25	12,00	24,00	2,58	3,64	—	101,47
Kukurica	192,80	40,18	47,70	47,78	166,32	158,24	184,38	837,40
Zemiaky	135,00	55,80	49,00	66,00	139,40	244,00	162,87	852,07

poľnohospodárskeho obyvateľstva, počet stálych pracovníkov v poľnohospodárstve, intenzita živočíšnej výroby na poľnohospodárskej pôde, pri pestovaní cukrovej repy vzdialenosť od železničnej nakladacej stanice atď.

Plánovacie údaje, ktoré sme vypočítali tradičným spôsobom, uvádzame na tabuľke VII.

Poznamenávame, že plánovacie miesta nevypočítali podrobne dávkovanie umelými hnojivami, avšak oznámili, že perspektívne sa ráta so spotrebou 80 kg živín na každé katastrálne jutro obrábanej poľnohospodárskej pôdy.

Po stručnom vysvetlení prírodných výrobných podmienok znázorňujeme, taktiež pomocou tabuľky, plánovanie podľa našej metodiky.

Na tabuľke VIII uvádzame osevnú plochu plodín plánovanú podľa prvo-triednych stanovišť a ďalej celkové výnosy podľa plodín plánované podľa tzv. „základných výnosov“.

Na tabuľke IX sme určili rozdiely medzi pôvodne plánovanými výnosmi a základnými výnosmi a vyrátali sme množstvo umelých hnojív, potrebných na vyrovnanie týchto rozdielov.

VIII. Osevná plocha plodín podľa prvotriednych stanovišť a celkové výnosy podľa základných výnosov

Obce	Dány	Kis-tarcsa	Nagy-tarcsa	Szada	Valkó	Vác-szent-lászló	Zsám-bok	Výmera
Osevná plocha plánovaná podľa stanovišť Prvotriedne stanovišia					Merná jednotka: %			
Pšenica	14,0	—	—	—	18,3	22,9	23,1	15,0
Raž	—	9,3	21,2	21,0*	—	—	—	4,0
Chlebové obilie	14,0	9,3	21,2	21,0	18,3	22,9	23,1	19,0
Kukurica	18,6	1,4	1,6	—	24,3	22,3	31,9	18,8
Zemiaky	2,3	2,8	7,8	18,9	9,5	4,3	—	5,3
Celková osevná plocha 4 plodín	34,9	13,5	30,6	49,9	52,1	49,5	55,0	43,1
Množstvo produkcie plánované podľa základných výnosov					Merná jednotka: vagón			
Pšenica**	60,50	—	—	—	59,40	81,40	83,60	284,9
Raž	—	9,50	28,50	21,00	—	—	—	59,0
Kukurica	132,30	2,70	4,14	—	129,24	129,60	189,00	586,98
Zemiaky	63,00	21,00	77,00	189,00	196,00	98,00	—	644,0
* Druhotriedne stanovišia ** Základné výnosy: pšenica 11,0; raž na prvotriednom stanovišti 9,5; na druhotriednom stanovišti 7,0; kukurica 18,0; zemiaky 70 q/k. j. Množstvo umelých hnojív na k. j. použité na vyrovnanie (zmes živín), viď tabuľku IX. Pšenica: 58 kg/k. j., z toho 32 kg/k. j. dusík, 18 kg/k. j. fosfor a 18 kg/k. j. vápnik Kukurica: 192 kg/k. j., z toho 72 kg/k. j. dusík, 40 kg/k. j. fosfor a 80 kg/k. j. vápnik Zemiaky: 98 kg/k. j., z toho 40 kg/k. j. dusík, 18 kg/k. j. fosfor a 40 kg/k. j. vápnik								

IX. Množstvo priemyselných hnojív k vyrovnaní rozdielov

Merná jednotka: vagón

Plodina	Pôvodne plánovaný výnos	Vypočítaný základný výnos	Rozdiel, treba vyro- vať umelým hnojením	K tomu potrebné množ- stvo živín vo forme zmesi umelých hnojív	
				spolu	kg/k. j.
Pšenica	349,23	284,90	106,80	15,26	59
Raž	101,47	59,00	—	—	—
Kukurica	837,39	586,98	250,41	62,41	192
Zemiaky	852,10	644,00	208,10	9,05	98

Na konečné skúmanej osevej ploche 7471 k. j. sa zvýšila požiadavka na umelé hnojivá z pôvodne plánovaného množstva 80 kg/k. j. na 116 kg/k. j. K tomu však poznamenávame, že štyri uvedené plodiny zaberali pôvodne 57 % celkovej ornej pôdy a my sme tento podiel znížili na 43,1 %.

Záverom možno konštatovať, že naša tabulková plánovacia metóda je pomôckou pre zostavenie plánu odvetvia rastlinnej výroby, ktorá obsahuje konkrétne číselné údaje. To usnadňuje a overuje prácu plánovacích miest.

Došlo dne 20. 2. 1965

Значение оценки влияния природных факторов при правильном составлении планов растениеводства

В рамках изучения территориального размещения сельскохозяйственного производства (районирования) мы исследовали все природные факторы, влияющие на эффективность растениеводства. Принимая во внимание природные факторы, можно определить подходящее местоположение для сельскохозяйственных культур и классификацию этих местоположений на основе ожидаемых урожаев. Результаты исследования мы свели в таблицы, а органам планирования при составлении плана растениеводства служат следующие пособия:

1. Карты и кадастры использования почв
2. Таблица природных мест произрастания сельскохозяйственных культур
3. Карта климатических областей страны
4. Таблица ожидаемых основных урожаев, составленная на основе дифференциации природных мест произрастаний и климатических областей
5. Таблица влияния искусственных удобрений и орошения на увеличение урожаев.

5. Таблица влияния искусственных удобрений и орошения на увеличение урожаев.

В работе приведено несколько примеров частичных данных при составлении системы и их применения. И наконец, наглядно приводим процесс планирования на примере пахотной земли производственных сельскохозяйственных кооперативов.

Bedeutung der Bewertung des Einflusses natürlicher Faktoren bei der richtigen Planaufstellung in der pflanzlichen Produktion

Im Rahmen der Forschungsarbeit zur Standortverteilung (Rayonierung) der landwirtschaftlichen Produktion überprüften wir sämtliche natürlichen Faktoren, die den Nutzeffekt der pflanzlichen Produktion beeinflussen. Die Berücksichtigung der natürlichen Faktoren ermöglichte es, geeignete Standorte für die landwirtschaftlichen Nutzpflanzen zu bestimmen und diese Standorte nach den vorausgesetzten Erträgen zu klassifizieren. Wir faßten die Forschungsergebnisse in Tabellen zusammen und den Planungsorganen stehen bei der Planaufstellung für den Zweig des Pflanzenbaus folgende Hilfsmittel zur Verfügung:

1. Karten und Kataster der Bodennutzung;
2. Tabelle der natürlichen Standorte der landwirtschaftlichen Nutzpflanzen;
3. Karte der Klimagebiete des Staates;
4. Tabelle der vorausgesetzten grundlegenden Erträge, die nach der Gliederung der natürlichen Standorte und Klimagebiete aufgestellt wurde;
5. Tabelle des Einflusses künstlicher Düngemittel und der Bewässerung auf die Ertragssteigerung.

Wir führten einige Beispiele der teilweisen Erkenntnisse auf, die bei der Erarbeitung des Systems und bei seiner Anwendung erworben wurden. Schließlich wird das Planungsverfahren am Beispiel der Ackerfläche dreier Landwirtschaftlichen Produktionsgenossenschaften veranschaulicht.

Dr. Gábor Géczy,

Maďarská akadémia vied, Výskumný
ústav poľnohospodárskej ekonomiky,
Budapešť

■ Cílem článku je stanovit metodiku posuzování ekonomické efektivity v jednotlivých chovech živočišné výroby z hlediska vlivu všech činitelů výroby a dále poskytnout návod, jak z tohoto hlediska hodnotit veškerá opatření v živočišné výrobě zaváděná.

Úkolem ekonomického rozboru není jen posuzovat skutečné výsledky výroby a na jejich základě vyvozovat příslušné návrhy. Pro podnik je neméně cenná možnost spekulace, možnost již předem přibližně stanovit, jak by se uvažované opatření projevilo v ekonomických výsledcích daného chovu v případě jeho zavedení. Na tomto základě lze již předběžně zhruba zjistit vhodnost nebo nevhodnost uvažovaných alternativ a navíc lze i předběžně stanovit, jaké úrovně výchozích parametrů výroby a tedy i výsledků výroby musíme v daném chovu dosáhnout, aby dané opatření vykazovalo lepší ekonomické výsledky než při dosavadním způsobu výroby.

* * *

Pod pojmem ekonomické efektivity rozumíme komplexní posuzování úrovně hospodaření. Ve výrobním procesu dochází k souhrnnému působení jednotlivých činitelů výroby, jež předpokládá určité množství nákladů do výroby vložených. Jejich výsledkem je určitý objem produkce.

Základem při posuzování ekonomické efektivity je úroveň výrobních vztahů vyjadřujících závislost mezi činiteli a výsledky výroby — intenzita zemědělské výroby, produktivita práce a rentabilita. Navíc je však nutno přihlížet i k národohospodářské potřebě a ke všem biologickým zákonitostem, aby popřípadě nedošlo k narušení výrobního procesu.

V článku bude pojednáno o závislosti výsledků výroby na činitelích výroby v oblasti živočišné výroby. Jednotlivá opatření, zde zaváděná, vedou ke změnám v působení těchto činitelů. Problém se komplikuje v tom, že při určitém opatření nedochází povětšinou ke změně jen jednoho faktoru. Změna v působení určitého faktoru nebo skupiny faktorů (ve směru, ale i v intenzitě a kvalitě) ovlivní ve velké většině případů i charakter působení faktorů ostatních. Proto ve výsledcích výroby většinou nedochází jenom k přímým změnám. Výsledný efekt je v podstatě vektorovou výslednicí působení komplexu faktorů.

Například v současné době se omezuje zkoumání ekonomické efektivity v chovu dojníc bezprostředně na jejich chov ve vztahu: náklady na chov dojníc — produkce mléka, telat a chlévské mrvy (viz současné metodiky vlastních nákladů, výpočet hrubého a čistého důchodu ve družstvech i ve státních statcích a na tomto základě i výpočet produktivity práce a rentability). Na druhé

straně však o efektivnosti chovu dojníc rozhodují i ekonomické projevy v odchovu jalovic, při brakování, dále životnost krav atd., takže teprve tento širší komplex činitelů se promítá v ekonomické efektivnosti vyráběného produktu. To znamená, že zvyšování efektivnosti výroby mléka předpokládá rozbor daleko širších souvislostí. Vliv těchto dosud neuvažovaných skupin faktorů je značný, jak vyplývá z dalšího pojednání.

Ke stejným závislostem dochází i v ostatních chovech hospodářských zvířat.

* * *

Chceme-li sledovat vliv určitého opatření, musíme si uvědomit, v čem spočívá jeho ekonomický projev. Jakákoli změna ve výrobním procesu má svůj odraz ve změně ekonomické efektivnosti. Pak budou kritéria pro posouzení vhodnosti uskutečňovaných opatření totožná s kritérii ekonomické efektivnosti: dosáhnout vyššího objemu produkce při vynaložení menšího množství společensky nutné práce na jednotku produkce.

Po stanovení základních kritérií následuje jejich konkretizace, tj. stanovení takových ekonomických ukazatelů, kteří by výše formulovaná kritéria co nejlépe vystihovali.

Výsledné působení faktorů se projevuje dvojím směrem:

a) v naturálních výsledcích živočišné výroby (které jsou výslednicí stavů a užítkovosti) a dále ve výsledcích hodnotových ($\emptyset$ realizační ceny),

b) ve výši nákladů, jimiž je daný chov zatížen.

Na základě těchto údajů (specifikovaných podle chovů) lze vyjádřit úroveň intenzity výroby, produktivity společenské práce a rentability, popř. jejich změnu při realizaci či předpokládané realizaci určitého opatření.

Pro ekonomický rozbor je důležité stanovit, jaké matematické souvislosti existují mezi veličinami uvedenými ad a) a b), jaký vztah mají k jednotlivým parametrům výroby, a naopak, jak jednotlivé parametry a jejich souhrn se projevují ve výsledném efektu.

* * *

Úkolem další části je vyjádřit matematické souvislosti parametrů výroby a jejich vliv na výsledky v jednotlivých chovech.

Nejprve bude nutno objasnit obsah v článku používaného pojmu „parametr“ a hlavně jeho vztah k jednotlivým činitelům výroby.

Při stanovení cíle ekonomického rozboru je nutno současně stanovit i hloubku zkoumání. Při rozboru zkoumáme především vztah ekonomického výsledku výroby s nejbližším ukazatelem, charakterizujícím výsledné působení činitelů výroby. Např. zkoumáme úroveň vlastních nákladů na jednotku živočišné produkce. Tento výsledný ukazatel je bezprostředně závislý např. na úrovni VN na krmný den (KD) a užítkovosti. Z hlediska sféry rozboru jsou poslední dva ukazatelé parametry, jež ovlivňují zkoumaný výsledek, a navíc jsou v určité závislosti k výsledku.

Je logické, že např. vlastní náklad na krmný den není sám o sobě prvotním činitelem výroby, na druhé straně je však jejich konkrétním odrazem, je výsledkem (mnohdy dílčím) jejich působení. Chceme-li např. dosáhnout dalšího snížení vlastních nákladů na jednotku produkce za předpokladu neměnného objemu produkce (tj. stavů a užítkovosti), musí nutně dojít ke kvantitativní změně druhého parametru: vlastního nákladu na krmný den. Přitom tím neřešíme způsob, jakou cestou tento VN/KD snížíme (to je otázka dalšího analytického rozboru). Stanovujeme tím však, že takto vyjádřená úroveň tohoto

ukazatele je za současných podmínek výroby předpokladem a podmínkou pro splnění vytyčeného cíle, tj. snížení VN na jednotku produkce při nezměněném rozsahu dané produkce.

Z hlediska dalšího analytického zkoumání stanovujeme pak další parametry, jejichž vzájemným působením dosáhneme předpokládané úrovně VN/KD, např. výše nákladů na ošetřování, na krmiva (zde je opět několik cest: např. lepší zhodnocení současné krmné dávky, změna struktury krmiv v dávce za stejných nákladů na jejich výrobu, změna ve výrobě krmiv atd.).

Úkolem článku je zkoumat vliv činitelů výroby na výsledky výroby daného chovu, proto se nadále budeme zabývat nejbližším okruhem parametrů, které tyto výsledky bezprostředně ovlivňují.

Údaje pro charakteristiku objemu produkce (ať naturálního či jeho ceny) jsou přímo zjistitelné. Maximálně se zde projeví vliv užítkovosti a stavů, popř. ceny výrobku, tj. veličiny při současných metodikách rozboru přímo zjistitelné.

Na druhé straně je problematický (s ohledem na současné, v praxi používané metodiky) výpočet vlastních nákladů hlavně svým okruhem zkoumání. V současné době je působnost výpočtu vlastních nákladů omezena na hranice daného chovu (např. chov dojníc, ostatní skot, chov prasnic, výkrm prasat atd.). Přitom v řadě případů existují mezi těmito jednotlivými chovy dodavatelsko-odběratelské vztahy (odchov jalovic — chov dojníc; výroba selat — výkrm apod.). Výsledky daného chovu (např. prasnic) pak ale nejsou samy o sobě finálním produktem.

Pojetí výpočtu VN v této práci se od současné praxe liší v tom, že sleduje celý řetěz nákladů v jednotlivých chovech až ke konečnému výrobku. Tak VN na mléko jsou ovlivňovány okruhem činitelů nejen v rámci samotného chovu dojníc, ale jsou závislé i na odchovu jalovic, brakování krav a jejich životnosti; ekonomika výroby vepřového masa je postupně ovlivňována v rámci chovu prasnic a výkrmu prasat (v případě, že selata nejsou finálním produktem podniku atd.).

V další části bude vyjádřen charakter působení takto definovaného okruhu na úroveň vlastních nákladů na jednotku živočišné produkce u mléka, u výroby hovězího a vepřového masa.

Charakter působení jednotlivých úseků a v jejich rámci výchozích údajů — parametrů na úroveň VN na litr mléka je vyjádřen ve schématu 1.

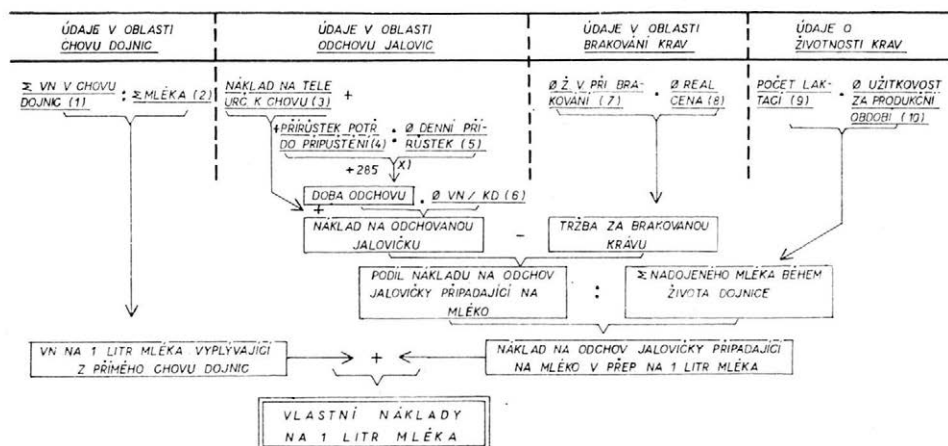
Ze schématu 1 vyplývá, že vlastní náklady na litr mléka ovlivňuje bezprostředně 10 parametrů (v schématu jsou podtrženy). Jejich vzájemná působnost a podmíněnost, jakož i specifická váha každého z nich s ohledem na výsledek je vyjádřitelná matematicky takto (pro přehlednost jsou uvedeny kódy jednotlivých parametrů ze schématu 1):

$$VN/1 \text{ l mléka} = \frac{(1)}{(2)} + \frac{(3) + \left[\left(\frac{(4)}{(5)} + 285 \right) \cdot (6) \right] - [(7) \cdot (8)]}{(9) \cdot (10)}$$

Výsledky výkrmu skotu ovlivňují tyto parametry (schéma 2):

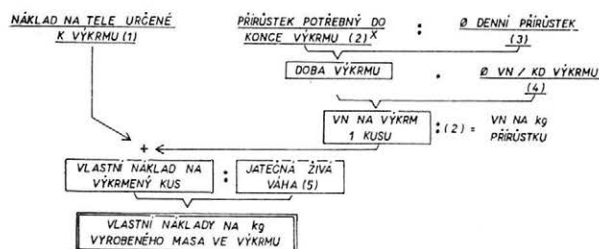
Stručně matematicky vyjádřeno:

$$VN/kg \text{ hov. masa z výkrmu} = \frac{(1) + \left[\frac{(2)}{(3)} \cdot (4) \right]}{(5)}$$



X) POČET DNÍ BŘEZOSTI; V PŘÍPADĚ ŠPATNÉHO ZABŘEZÁVÁNÍ MŮŽE BÝT DOBA V Ø STÁDA DELŠÍ

Schéma 1. Vliv výchozích údajů na úroveň vlastních nákladů na 1 litr mléka



X = JATEČNÁ ŽIVÁ VÁHA - VÁHA TELETE

Schéma 2. Vliv výchozích údajů na úroveň vlastních nákladů na jednotku vyrobeného hovězího masa ve výkrmu

Analogicky lze vyjádřit i postup výpočtu VN na 1 kg vepřového masa. V tomto případě je však nutno rozlišovat VN na jednotku přírůstku při samotném výkrmu a vlastní náklady na jednotku vyrobeného vepřového masa.

Vlastní náklady na jednotku přírůstku jsou bezprostředně ovlivňovány těmito parametry (schéma 3):

Stručně matematicky vyjádřeno:

$$\text{VN/kg přírůstku} = \frac{(1)}{(2)} \cdot (3)$$

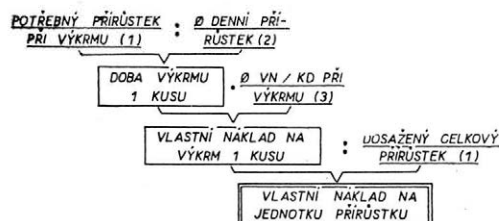
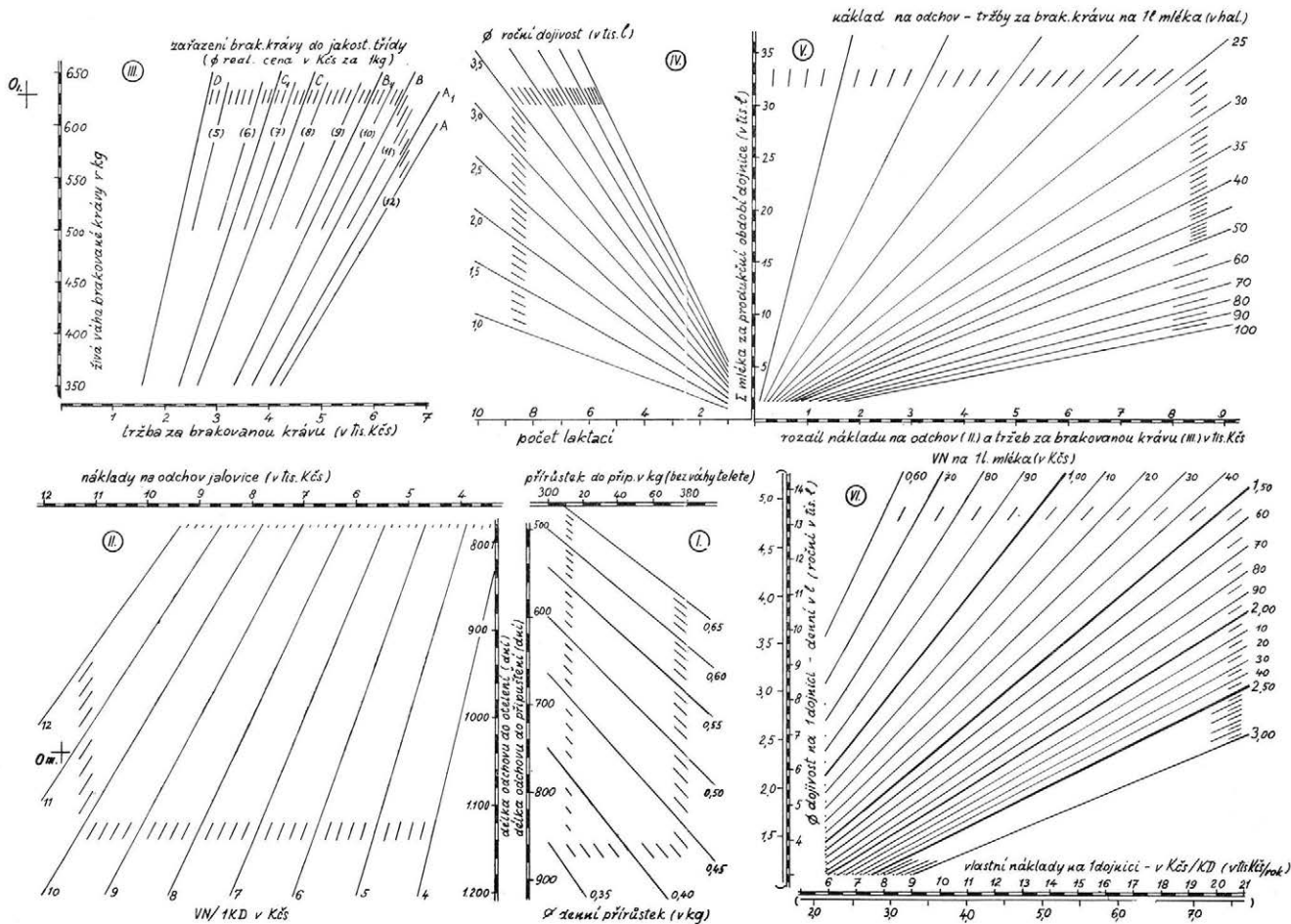


Schéma 3. Vliv výchozích údajů na úroveň vlastních nákladů na jednotku přírůstku vepřového masa

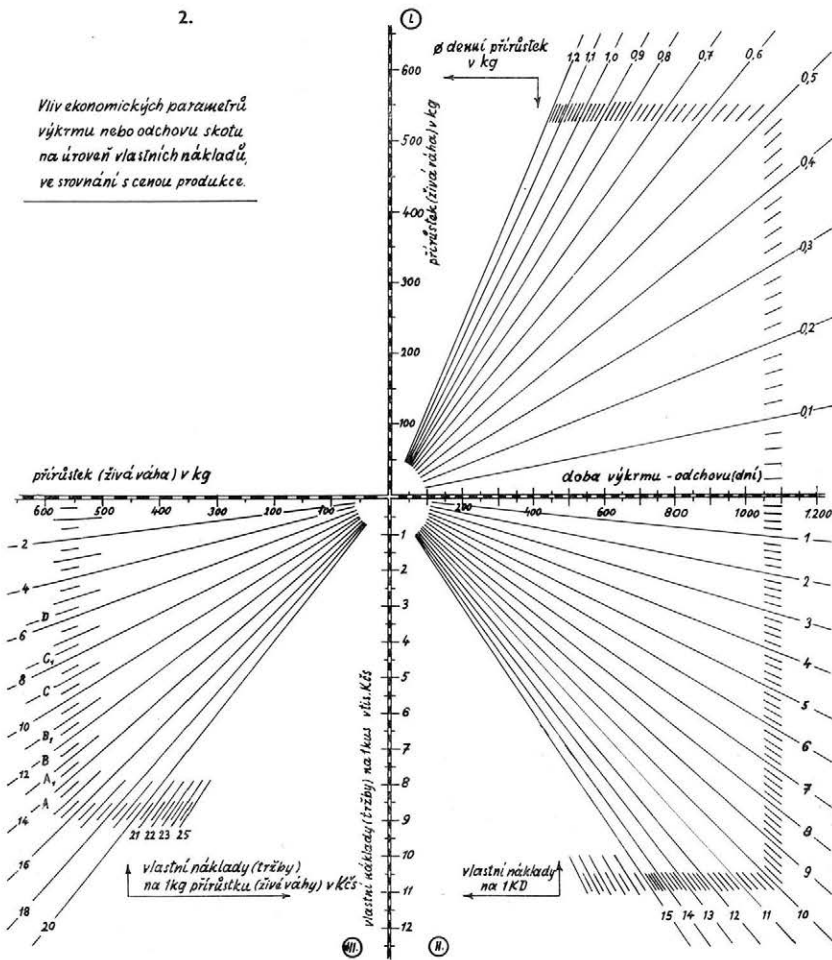
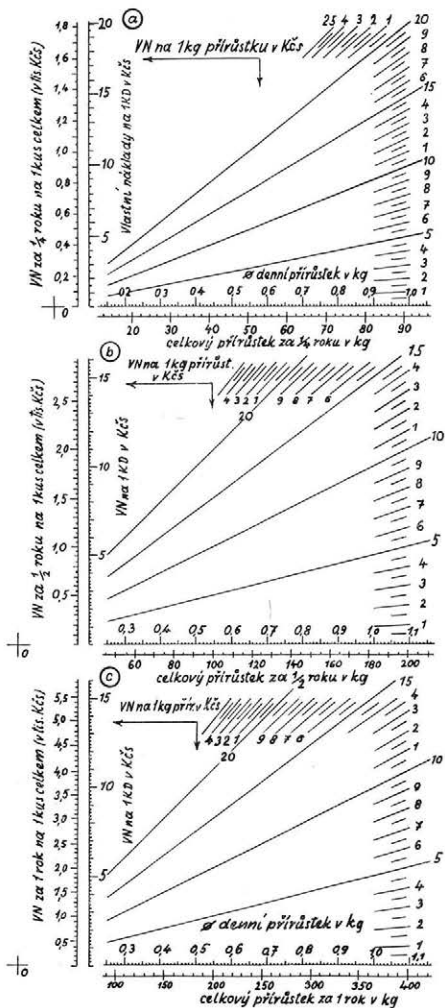
Vliv ekon. parametrů v chovu dojníc
na úroveň vlastních nákladů

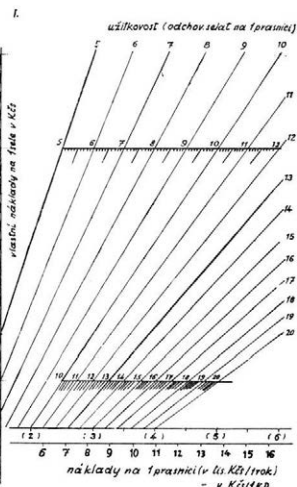
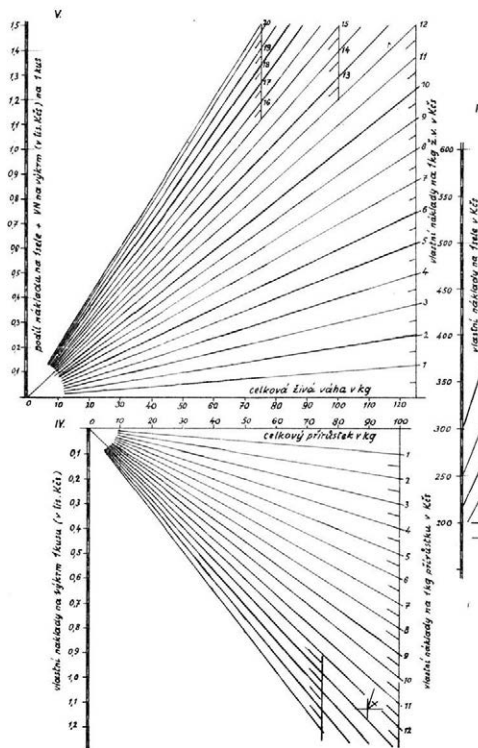
I.



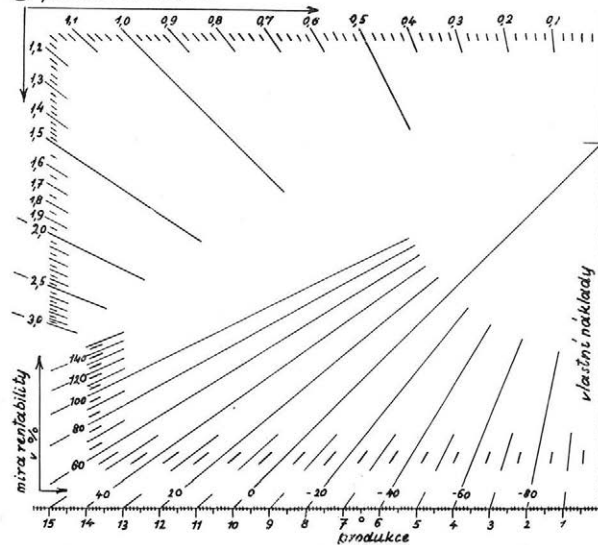
2.

Vliv ekonomických parametrů
výkrmu nebo odchovu skotu
na úroveň vlastních nákladů,
ve srovnání s cenou produkce.



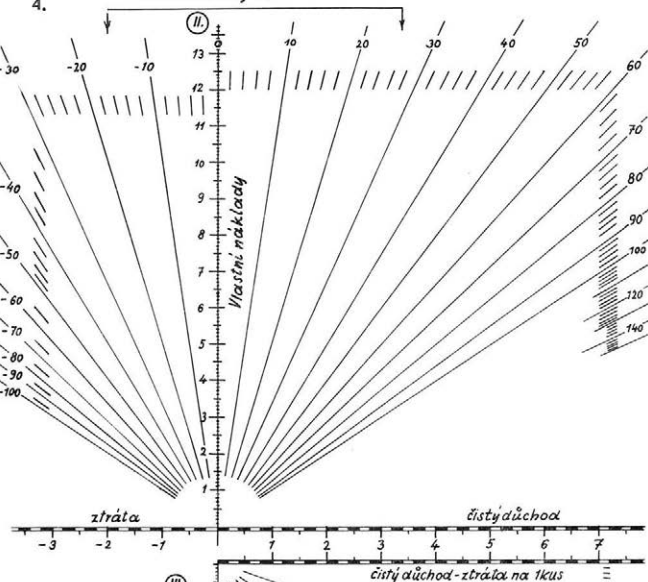


I produktivita společ. práce

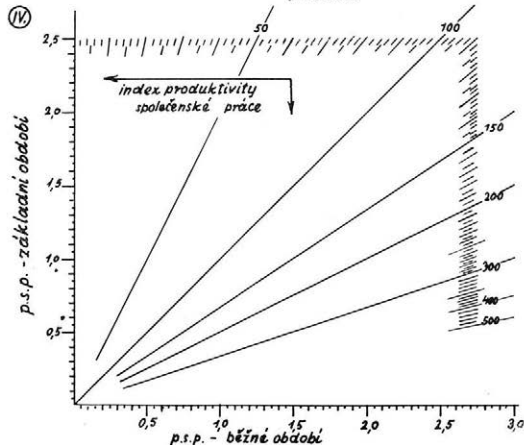


4.

míra rentability v %

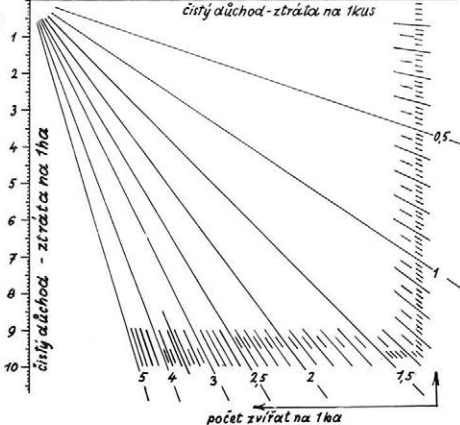


IV.



Vliv produkce a nákladů
na úroveň rentability (míra - I,
objem II. a III.) a na produktivitu
společenské práce - I a IV.

III.

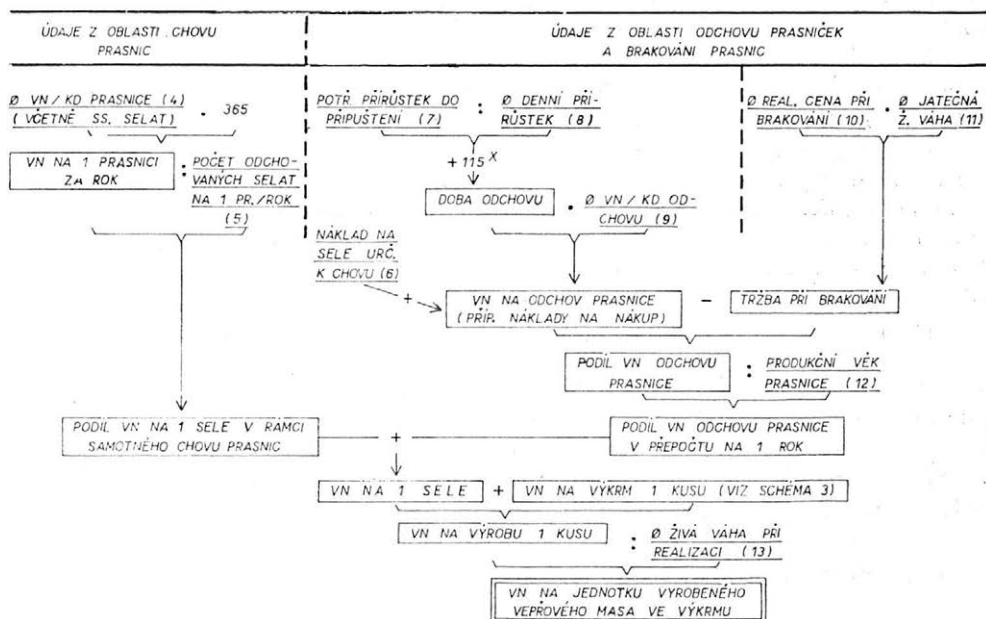


Vlastní náklady na kilogram vyrobeného vepřového masa nutno navíc rozšířit o vlastní náklady na selata.

VN na sele možno členit na dvě skupiny:

- I. Na podíl odchovu prasnice (náklady na odchov, snížené o tržbu při brakování);
- II. Na náklady spojené s vlastní výrobou selat, tj. při chovu prasnic.

Parametry, které k tomuto účelu nutno zvažovat, a jejich vzájemné vztahy jsou uvedeny v schématu 4:



X) DĚLKA BŘEZOSTI; V PŘÍPADĚ ŠPATNÉHO ZABŘEZÁVÁNÍ MŮŽE BÝT DOBA V Ø STÁDA DELŠÍ

Schéma 4 Vliv výchozích údajů v oblasti chovu prasnic na úroveň vlastních nákladů v přepočtu na jednotku vyrobeného vepřového masa

Zvážíme-li úplný proces výroby vepřového masa (schéma 3+4), můžeme stručně vyjádřit matematickou souvislost jednotlivých parametrů ovlivňujících úroveň VN na jednotku vyrobeného vepřového masa takto:

$$\text{VN/kg vepř. masa} = \frac{\frac{(4)}{(5)} + (6) + \left[\left(\frac{(7)}{(8)} + 115 \right) \cdot (9) \right] - [(10) \cdot (11)] + \left[\frac{(1)}{(2)} \cdot (3) \right]}{(13)}$$

Docházíme k závěru, že jakékoli realizované nebo navrhované opatření v rámci určitého chovu musí nutně ovlivnit úroveň určitého jmenovaného parametru, popř. více parametrů, a tím ovlivnit i úroveň vlastních nákladů na jednotku produkce.

V schématech jsme ukázali na vzájemnou závislost a podmíněnost jednotlivých parametrů. Navíc z přehledu (a hlavně pak při přímém propočtu)

je patrna i specifická váha a tudíž i ekonomický význam jednotlivých parametrů. To nám umožňuje uvědomit si, kde a jak se dané opatření projeví. Význam použité metody je tedy v tom, že nám konkrétně pomáhá při rozhodování v rámci podniku.

Nutno si však uvědomit, že použití uvedených propočtů je širší v tom směru, že při úvahách možno postupovat z kteréhokoli místa. Při spekulaci bude nejběžnější opačný postup, než je vyjádřen v uvedených schématech.

Například podnik dosáhl určitého ekonomického výsledku výroby, který nebude nejlepší. K tomu, aby se zvýšila rentabilita odvětví, bude třeba snížit VN na jednotku výrobku. V tom případě bude úvaha vedena tím směrem, jak musíme ovlivnit a změnit jednotlivé parametry výroby, abychom dosáhli předpokládaného výsledku.

Naopak, jestliže možnosti podniku v daném chovu jsou vyčerpány (nelze parametry dále příznivě ovlivňovat) a ekonomické výsledky nejsou pro podnik výhodné, je třeba i z takových případů vyvozovat závěry atd.

Na základě souvislostí jednotlivých parametrů (viz schémata, popř. vzorce) lze řešit celou řadu dalších úloh, se kterými se v provozu denně setkáváme: často je nutno zvážit, kdy bude pro podnik výhodnější nakupovat mladá zvířata, popř. zvířata pro další chov, nebo je např. třeba posoudit, jak se musí dále vyvíjet úroveň ostatních parametrů chovu, je-li některý z nich limitujícím faktorem, aby bylo zajištěno další zvyšování efektivnosti výroby atd.

Na místě je zmínit se i o vztahu navrhovaného způsobu vyjadřování vlivu parametrů výroby na její ekonomické výsledky s ohledem na použití matematických metod (např. lineárního programování apod.), které mohou postihnout jednotlivé faktory výroby hlouběji. Nedostatkem je, že v uvedeném způsobu, kde propočty jsou konány víceméně experimentálně, nelze vyjádřit optimum vazeb jednotlivých parametrů. Na druhé straně jakékoliv „optimum“ úlohy bude vždy měnlivé, změníme-li parametry výroby.

Spatřujeme-li však účel v rychlé orientaci v provozu, v možnosti operativní spekulace, pak daný způsob plně vyhovuje.

* * *

Matematické vyjádření ve formě, jak bylo uvedeno ve schematických vzorcích, má nedostatek v tom, že při určité hodnotě parametru vychází jednoznačný výsledek. Chtěli-li bychom sledovat např. tendence při zvyšování určitého parametru, museli bychom dosazovat do vzorců jednotlivé hodnoty a dělat poměrně pracné výpočty (v podstatné řadě případů přitom nejde o prostý lineární vztah). Pro tento účel je velmi vhodné použití grafických metod. I když výčet údajů nebude tak přesný jako při výpočtu (při vyčítání pracujeme jen se dvěma trojúhelníky a tužkou), pro povšechnou orientaci je tento způsob velmi vhodný. S minimálními prostředky splní požadavky pro potřebnou úvahu, navíc pak se projeví i úspora času.

Uvedené přednosti grafické metody vyplynou i z tohoto jednoduchého příkladu: chceme např. zkoumat jednoduchou závislost, jak dlouho bude trvat doba výkrmu mladého skotu do určité živé váhy (např. 450 kg), bude-li se měnit průměrný denní přírůstek. Údaj doby výkrmu je důležitý např. pro další úvahu nákladů na výkrm jednoho kusu (VN/KD . počet dní). Matematicky vyjádřeno:

$$\text{doba výkrmu} = \frac{\text{přírůstek celkem (v ž. v.)}}{\varnothing \text{ denní přírůstek}}$$

Již ze vzorce je patrné, že záměnou hodnot určitého ukazatele bude vyjádřena závislost geometrická. Místo postupného výpočtu, kdy bychom uvažovali jednotlivé hodnoty v určitých intervalech a na základě výpočtů bychom usoudili na celkovou tendenci, je použití vhodného nomogramu¹⁾ daleko rychlejší, neboť pomocí dané přímky (viz nomogram 2, část I) vedené rovnoběžně s osou x (ve výši 450 kg), protínající nám jednotlivé charakteristiky průměru denních přírůstků, můžeme přímo vyčítat hodnoty doby výkrmu na ose x . V uvedeném příkladu při změně ϕ denního přírůstku, např. z 0,45 kg/kus na 0,50; 0,56; 0,68; 0,80 atd., se změní doba výkrmu z 1000 dní na 900, 804, 662, 562 dní apod.

Zmíněná výhodnost použití grafické metody vedla k sestrojení uvedených nomogramů pro chov dojníc (n. 1), výkrm a odchov skotu (n. 2) a chov prasat (n. 3), které odpovídají dříve uvedeným požadavkům. Při použití uvedených nomogramů lze zjišťovat velmi rychle potřebné orientační výpočty a navíc je daleko širší možnost úvah než při počítání dosazováním do vzorců.

Poslední připojený nomogram (n. 4) umožňuje posoudit úroveň ekonomické efektivnosti na základě variability produkce a nákladů.

Uvedené nomogramy jsou zařazeny jako přílohy za stránkou 714.

* * *

V další části bude pojednáno o možnostech využití uvedených nomogramů.

Rozsah a skladba jednotlivých nomogramů se budou pochopitelně řídit účelem rozboru. Uvedené nomogramy vystihují vliv parametrů, které bezprostředně ovlivňují úroveň VN na jednotku produkce v rozsahu, jak byl uveden výše (viz příslušná schémata). Přesto však při práci s nimi se objevují některé drobnější odlišnosti v rozsahu používaných údajů.

U chovu dojníc (nomogram 1) lze vyjádřit náklady na odchov jalovice (část I a II) v závislosti na potřebném přírůstku, průměrném denním přírůstku a ϕ VN/KD. Navíc je třeba připočítat náklad na tele určené k chovu. Část III vyjadřuje tržby na brakovanou krávu v závislosti na živé váze a zařazení do jakostní třídy. Rozdíl nákladů na odchov jalovic a tržby za brakovanou krávu je částka, která v našem případě zatěžuje svými náklady produkci mléka (část V). Jakou měrou budou VN zatíženy, to závisí na životnosti a ϕ roční dojivosti za produkční období dojnice (IV) neboli na sumě mléka, které dojnice za svůj život nadojí. Výsledkem jsou „odpisy“ v přepočtu na litr mléka.

Další výpočet se týká vlastního chovu dojníc (část VI): je vyjádřena závislost VN na litr mléka na užitkovosti a VN/KD, popř. VN na dojnici za rok. Součtem nákladů na litr mléka z částí VI a V získáme VN na litr mléka.

Jaké úlohy lze řešit v chovu dojníc ať již pomocí nomogramů (jednoduchost), nebo výpočtu na základě uvedeného vzorce, popř. jeho modifikace, nej názorněji vyplývá z příkladu:

Předpokládejme, že v daném družstvu byla zjištěna v chovu dojníc a odchovu mladého skotu situace, již můžeme charakterizovat parametry výroby, popsány v schématu 1.

¹⁾ Konstrukce nomogramů je sestavena tak, že pro daný účel jsou vyneseny údaje o potřebném celkovém přírůstku na ose y , druhý parametr, tj. doba výkrmu, na ose x . Na základě souvislosti těchto dvou parametrů byly vyhledány takové hodnoty, které tvoří konstanty ($= \phi$ denní přírůstek na kus). Tyto konstantní ϕ denní přírůstky leží na poloparabole, jehož jeden bod je v počátku, ostatní body pak přímo určují vzájemnou závislost údajů na osách x a y .

Ještě před uvedením jednotlivých údajů (tab. I) nutno upřesnit způsob vyjádření některých parametrů. Upřesnění vyplývá z charakteru chovu dojníc a s ním spojené metodiky výpočtu VN. Problém komplikuje skutečnost, že výsledkem výrobního procesu v chovu dojníc není jen produkce mléka, ale i produkce telat a chlěvské mrvy. Úkolem pojednání není také úvaha volby nejvhodnějšího způsobu rozčítání celkových VN na jednotlivé výrobky v kalkulační skupině. Pro jednoduchost byl zvolen způsob dnes běžně používaný v praxi, tj. odečítání ceny chlěvské mrvy od celkových VN a transformace narozených telat na mléko (1 tele = 100 l mléka).

I.

Parametr číslo	Používaná část nomogramu 1	Ukazatel	
(1)	VI	VN/KD u dojníc (bez chlěvské mrvy) 12,80—0,82	11,98 Kčs
(2)	VI	∅ roční dojivost + prod. telat (à 100 l) 2043 + 96 ∅ realizační cena mléka	2139 litrů 2,00 Kčs
(4)		váha telete při narození ∅	35 kg
(3)		ocenění telete (à 7 Kčs/kg)	245 Kčs
(4)	I	∅ živá váha při připouštění	385 kg
(5)	I	∅ denní přírůstek odchov. jaloviček	0,48 kg
(6)	II	VN/KD mladého skotu 6,58—0,29	6,29 Kčs
(7)	III	∅ živá váha při brakování krávy	440 kg
(8)	III	∅ zařazení brakované krávy do jakostní třídy (D až C ₁); ∅ realizační cena	5,00 Kčs
(9)	IV	∅ počet laktací dojnice	5,5
(10)	IV	∅ roční dojivost v posledních pěti letech	1950 litrů

Údaje v tabulce I představují současnou situaci v ekonomické úrovni chovu dojníc. Na základě těchto údajů lze učinit výpočet VN na litr mléka (viz vzorec u schématu 1):

$$V/1 \text{ l mléka} = \frac{11,98 \cdot 365}{2139} + \frac{245 + \left[\left(\frac{350}{0,48} + 285 \right) \cdot 6,29 \right] - (440 \cdot 5)}{5,5 \cdot 1950} =$$

$$= 2,04 + 0,41 = 2,45 \text{ Kčs}$$

Ke stejnému výpočtu (ovšem pravděpodobně s menší přesností) bychom dospěli vynesemím údajů do nomogramů. V tomto případě, kdy jde o jednoznačný výsledek (nebudeme uvažovat, jak by se změnil ekonomický výsledek

při změně jednotlivých parametrů), bude přímý výpočet zřejmě rychlejší než práce s nomogramem.

Přesto uvedme, jak bychom, hlavně z hlediska celkového postupu při používání nomogramů, postupovali v uvedeném případě (jako pomůcka bude sloužit nomogram 1):

1. vypočítali bychom VN na litr mléka v samotném chovu dojníc (viz část VI): známe parametr průměrné dojivosti dojnice (ať roční či denní) — viz měřítko na ose y — hodnota $2139 = \emptyset$ denní dojivost 5,86 litrů — vedeme rovnoběžku s osou x ; druhý parametr — VN/KD nebo VN na dojnici za rok (11,98 Kčs/KD) — vedeme rovnoběžku s osou y . Průsečík vyjadřuje úroveň VN na litr mléka; tento údaj lze spolehlivě vyčíst na měřítku v pravém, popř. v horním okraji tak, že spojíme uvedený průsečík s počátkem a pomocí prodlouženého polopaprsku vyčteme na měřítku příslušný údaj ($= 2,04$ Kčs).

2. Dále následuje výpočet „amortizace“ dojníc v přepočtu na litr mléka:

a) známe cenu narozeného telete (245 Kčs);

b) k tomuto nákladu přičteme náklad na odchov jalovičky.

Tento náklad závisí na potřebném přírůstku (část I, osa x) — 350 kg a na $\emptyset$ denním přírůstku na kus (0,48 kg). Průsečík rovnoběžky s osou x s polopaprskem pro průměrný denní přírůstek 0,48 promítá na osu y bod charakterizující délku odchovu do připuštění (729 dní), což transformováno do stupnice na ose y v části II (posunuta o $+285$ dní) vyjádří délku odchovu do otelení (1014 dní). V tomto bodě vedeme rovnoběžku s osou x a hledáme průsečík s polopaprskem charakterizujícím $\emptyset$ VN/KD na odchov jalovice ($\times 6,29$ Kčs). Kolmicí spuštěnou z tohoto průsečíku na osu x získáme údaj charakterizující celkový náklad na odchov jalovice ($= 6378$ Kčs);

c) výši „amortizace“ snižují tržby za brakovanou krávu (část III): tato tržba je závislá na $\emptyset$ živé váze při brakování — 440 kg (stupnice na ose y) — vedeme rovnoběžku s osou x a $\emptyset$ realizační ceně zařazení do jakostní třídy) $= 5$ Kčs/kg. Získaný průsečík promítnutý do stupnice na osu x určuje tržbu za brakovanou krávu (2200 Kčs);

d) sečtením nákladu na tele a odchov jalovice a odečtením tržby za brakovanou krávu získáme celkovou částku vyjadřující výši celkové amortizace v přepočtu na dojnici ($= 4423$ Kčs);

e) amortizace v přepočtu na litr mléka je nepřímo úměrně závislá na množství mléka, které dojnice nadojí za své produkční období (viz stupnice na ose y části IV a V). Toto množství mléka je závislé na počtu let, popř. laktací, $= 5,5$ — stupnice na ose x části IV — rovnoběžka s osou y v tomto bodě — a na průměrné roční dojivosti za produkční život dojnice (1950 litrů). Průsečík polopaprsku s rovnoběžkou s osou y v bodě 5,5 na ose x ve svém průmětu na osu y vyjadřuje množství nadojeného mléka za produkční období dojnice (10 725).

Zbývá učinit výčet podílu amortizace na litr vyrobeného mléka (část V). Hledáme průsečík rovnoběžky s osou x (10 725) a s osou y (4423), který, prodloužen ve spojnici s počátkem, vymezí na stupnici v pravém či horním okraji potřebný údaj (0,41 Kčs).

3. VN na litr mléka jsou výsledkem součtu výsledků ad 1. a 2.: $2,04 + 0,41 = 2,45$ Kčs.

Vyjádření skutečných VN na litr mléka lze považovat za úvodní výpočet, sloužící jako orientační srovnávací podklad pro další spekulace, kdy uvažujeme, jakých ekonomických výsledků bychom dosáhli v případě využití existujících rezerv nebo zavedením určitých opatření, která by ovlivnila ekonomiku výroby mléka.

Jaké úkoly lze řešit pomocí uvedených nomogramů vyplýne z dalších příkladů²⁾.

Předpokládejme, že v daném podniku byl uskutečněn důsledný analytický rozbor příčin ekonomické úrovně výroby mléka jako podklad pro další úvahy:

1. Byla posouzena ekonomická efektivnost vynaložených krmiv a využití produkční schopnosti v chovu dojníc, přičemž bylo konstatováno,

— že v průběhu roku (hlavně v letním období) došlo k neúměrnému plýtvání krmivy, jež zvyšovalo VN/KD nejméně o 0,70 Kčs;

— že nebylo dostatečně využíváno produkční schopnosti dojníc — rezerva činí přes 100 l na kus a rok. Na podkladě části VI nomogramu 1 možno odpovědět na tyto a podobné otázky (popřípadě učinit výpočty):

a) jak by se změnila úroveň vlastních nákladů na litr mléka ($= - 0,21$ Kčs);

b) jaký je podíl snížených nákladů na KD (zvýšení užitkovosti) na snížení VN/1 litr mléka ($-0,12$ Kčs; $-0,09$ Kčs);

c) o kolik bych mohl zvýšit VN/KD (tj. prakticky náklad na krmiva v zimním období, aby náklady na litr mléka při užitkovosti $2143 + 96 = 2239$ litrů zůstaly nezměněny $(+1,25$ Kčs);

d) naopak, jak vysoká užitkovost by odpovídala původnímu VN/1 litr v případě, že VN/KD by byl o 0,70 Kčs nižší ($2067 - 96 = 1971$ litrů);

e) kdybychom uspořili (např. ekonomičtější výrobou krmiv apod.) 1,00; 1,50; 2,00 Kčs/KD při původní užitkovosti, jak by se to projevilo ve VN/1 litr mléka? ($- 0,17$; $- 0,25$; $- 0,34$ Kčs).

Tento praktický příklad se týká řešení úloh (spekulace) v jediné části nomogramu 1, části VI. Další možné úvahy závisí na počtu dalších proměnných.

2. Značné rezervy má podnik i v odchovu jalovic. Průměrný denní přírůstek je nízký (navíc prodlužuje dobu odchovu, snižuje plemennou hodnotu atd.).

V podniku bylo zjištěno, že hlavní příčina tkví v nedostatečných krmných dávkách. Bylo prokázáno, že zvýšení množství krmiv a zkvalitnění krmných dávek (uskutečněn propočet zootechnických požadavků na obsah živin v krmné dávce) na úroveň odpovídající produkčním schopnostem jalovic by si vyžádalo zvýšeného nákladu na KD přibližně o 1 Kčs. Takto zajištěné krmné dávky vytvářejí předpoklady pro zvýšení průměrného denního přírůstku o 0,12 kg.

f) Jaký musí být minimální průměrný denní přírůstek při zvýšení VN/KD jalovic o 1,00; 1,50; 2,00 Kčs, aby toto opatření nevyvolalo zvýšený náklad na odchov jalovic (musíme minimálně dosáhnout přírůstku 0,59; 0,65;

²⁾ S ohledem na rozsah článku nebude již nadále popisován postup při práci s příslušnými nomogramy ani případný postup při výpočtech na základě modifikací uvedeného vzorce. Pro ilustraci, popř. kontrolu jsou uvedeny jen výsledky, tj. výsledné efekty jednotlivých uvažovaných opatření. Jinak lze o další postupy při práci s nomogramy požádat přímo autora tohoto příspěvku.

0,72 kg/kus a den; v současné době možno považovat hranici 0,65 kg za strop, tzn., že za současných podmínek by VN/KD neměl být větší než 7,79 Kčs);

g) bude-li přírůstek 0,50; 0,55; 0,60 kg/kus a den, jak se mohou měnit VN/KD, aby opatření nevyvolalo zvýšený náklad na jalovici proti původnímu stavu (maximální zvýšení VN/KD na úroveň 6,47; 6,92; 7,35 Kčs/KD);

h) jak toto opatření ovlivní VN/1 litr mléka, když navíc lepším odchovem je předpoklad prodloužení produkčního období dojnice nejméně o rok a zvýšení průměrné roční dojivosti za produkční období na 2100 litrů (včetně telete). Uvažovaná opatření sníží úroveň VN/1 litr mléka o 0,09 Kčs („amortizace“ se sníží z 0,41 na 0,32 Kčs).

Uvážíme-li dosavadní předpokládané snížení VN/1 litr mléka, tj. body a) a h), projevuje se již u těchto dvou opatření snížení VN z 2,45 na 2,15 Kčs, tj. úspora 0,30 Kčs/1 litr (o 12,25 %) při zvýšení hrubé produkce o 4,67 % a při zrychlení obratu stáda určeného k odchovu se všemi doprovodnými ekonomickými znaky, jako např. menší potřeba kapacity stáje, nižší amortizace, náklady na ošetřování atd.

3. Vhodný způsob krmení a ošetřování krav při brakování povede k jejich dobré jatečné kondici při brakování: Ø živou váhu lze zvýšit alespoň o 40 kg při změně Ø jatečné třídy nejméně na C₁ až C. Prozatím, protože určitá část krav je brakována nutně, uvažujeme C₁.

Toto opatření si nemusí vyžádat zvýšení nákladů v případě, že půjde o lepší ošetřování a rozdělení krmiv:

i) jaký to bude mít vliv na VN/1 litr mléka. (Snížené VN o 0,07 Kčs, tj. spolu s předcházejícími opatřeními na 1,83 + 0,25 = 2,08 Kčs/1 litr mléka).

4. Prozatím šlo o rezervy vyplývající ze současného stavu. Možno však uvažovat i perspektivně. Tak např. vhodným odchovem jalovic při průměrném denním přírůstku 0,60 kg/kus, VN/KD 7 Kčs a účelnou plemenářskochovatelemskou prací, ozdravením stáda atd. je reálný předpoklad, že v průběhu pěti let dojde ke zvýšení průměrné roční dojivosti na 2500 litrů (+ 1 tele) při zvýšení produkčního období dojnic na 8 laktací:

j) jak se tato skutečnost projeví v úrovni VN/1 litr mléka, jestliže současně předpokládáme zvýšení nákladu u dojnic na KD na 13 Kčs? (za uvedených parametrů bychom vyráběli litr mléka nákladem 1,82 + 0,15 = 1,97 Kčs);

k) současně zkoumáme, jaká by byla úroveň produktivity společenské práce (HP/VN) a rentability (ČD/VN; ČD/1 dojnici) a k jakým změnám by došlo proti původnímu stavu. Předpokladem pro výpočet rentability je ovšem i odhad Ø realizační ceny — předpokládáme, že zvýšením tučnosti a čistoty mléka dojde ke zvýšení Ø realizační ceny na 2,20 Kčs. (Zvýšení produktivity společenské práce o 22,29 %; změna míry rentability z -16,49 % na + 11,66 % a ČD/1 dojnici a rok z -853,70 Kčs na +599,90 Kčs.)

Pro řešení poslední úlohy (ad k/) lze vhodně použít nomogramu 4, jenž sleduje vliv produkce a nákladů na úroveň produktivity společenské práce (část I a IV) a rentabilitu (míra — část I a objem ČD — část II a III).

I když konstrukce nomogramu 4 je v podstatě stejná jako u předcházejících, přesto se zde objevuje několik drobnějších odlišností:

a) výpočet indexu produktivity společenské práce je výsledkem porovnání úrovně produktivity společenské práce běžného období k úrovni p. s. p. zá-

kladního období (viz část IV). Úroveň p. s. p. jednotlivých období lze vyčíst na základě vzájemného vztahu objemu produkce ať již v naturálních jednotkách, či stálých cenách (osa x část I), a srovnatelných vlastních nákladů (osa y). Průsečík spojený s počátkem je podkladem pro polopaprsek, který ve svém průmětu na stupnici p. s. p. udá příslušnou hodnotu; v našem případě počítáme s těmito výchozími údaji: $P_0 = 2139$, $VN_0 = 5177^3$, $P_0/VN_0 = 0,41$; $P_1 = 2600$, $VN_1 = 5145^4$, $P_1/VN_1 = 0,51$ (viz část I). V části IV vyčteme příslušný index pro p. s. $p_1 : p_0$ ($= 124$).

b) u výpočtu rentability je poněkud odlišný způsob vyjádření ukazatele míry rentability. Podkladové údaje jsou opět obsaženy v části I, i když měřítko na ose x představuje v tomto případě cenu produkce (na rozdíl od naturálního objemu produkce při vyjádření p. s. p.) a na ose y skutečné vlastní náklady.

Výchozími údaji pro výpočet míry rentability mohou být $\emptyset$ realizační cena a VN na litr mléka, výhodnějšími údaji s ohledem na další vyjadřování objemu čistého důchodu (viz část II, popř. III) jsou však: cena produkce a skutečné vlastní náklady v přepočtu na dojnici a rok.

Postup výčtu míry rentability (část I) spočívá v nastavení příslušné ceny produkce na ose x a vlastních nákladů na ose y , dále však nehledáme průsečík kolmic, jako tomu bylo u p. s. p., nýbrž přímku danou uvedenými dvěma body na osách x a y posuneme rovnoběžně až do bodu 10 na ose y . Na ose x lze pak přímo vyčíst příslušné hodnoty. Z případu vyplývá, že $cP_0 = 4324$ Kčs, $VN_0 = 5177$ Kčs, obojí v přepočtu na dojnici. Pak $r_0 = -16,5\%$, obdobně $cP_1 = 5745$ Kčs⁵, $VN_1 = 5145$ Kčs, $r_1 = +11,5\%$.

Na základě dosažené míry rentability a vlastních nákladů na dojnici za rok lze vyčíst z části II objem čistého důchodu na dojnici a rok (na ose x). Postup v uvedeném příkladě: $r_0 = -16,5\%$, $VN_0 = 5177$ Kčs, $r_1 = +11,5\%$, $VN_1 = 5145$ Kčs; pak $\check{C}D_0 = -850$ Kčs, a $\check{C}D_1 = +600$ Kčs v přepočtu na dojnici.

Promítnutím $\check{C}D$ (ztráty) na osu x části III při úvaze hustoty zvířat (dojnic) na jednotku plochy lze navíc vyjádřit i objem čistého důchodu na jednotku plochy.

Je logické, že použitelnost nomogramu 4 není omezena jen na chov dojnic, ale jeho platnost je u všech chovů.

* * *

Z příkladu chovu dojnic vyplývá způsob práce s uvedenými nomogramy. Dále se proto zmíníme jen stručně o obsahu zbývajících dvou nomogramů (č. 2 a 3).

Vliv parametrů výroby na úroveň VN při výkrmu či odchovu skotu je vyjádřen v nomogramu 2. V části III je navíc vyznačeno zařazení do jakostní třídy. VN/1 kg masa by měl být menší než cena příslušné jakostní třídy, totéž musí platit i o přírůstku nákladu, jenž se může projevit buď přírůstkem na váze či změnou kvality výrobku (vliv tzv. cenové avance).

V uvedeném nomogramu je v částech a) — c) rozložen výkrm či odchov skotu do $\frac{1}{4}$ —, $\frac{1}{2}$ — a celoročních intervalů. Pomocí těchto vztahů lze řešit úlohy typu: dosahujeme-li výsledku výkrmu, jež lze charakterizovat určitou

³⁾ Náklady v chovu dojnic + náklady na tele + amortizace dojnic/rok.

⁴⁾ Dtto.

⁵⁾ Cena produkce mléka + cena telete.

průměrnou realizační cenou a VN na vyrobený kilogram, pak v jednotlivých etapách výkrmu musíme dosahovat určitých ekonomických výsledků, aby nedošlo k narušení efektu celého výkrmu.

Dále, je-li odchov telete do $\frac{1}{4}$ ($\frac{1}{2}$) roku zatěžován určitými VN/KD přírůstkem + náklad na tele, zbývají určité limitované prostředky, jež lze překročit, aby chov byl efektivní.

Poslední nomogram 3 řeší analogicky vliv ekonomických parametrů výroby na úroveň vlastních nákladů v chovu prasat. Je vyjádřen vliv chovu prasnice (část I), jehož výsledkem je náklad na 1 sele a vliv parametru ve výkrmu (část II a III) na náklady na jednotku přírůstků (část IV) a jednotku vyrobeného masa v celém chovu (část V).

V tomto nomogramu není, s ohledem na složitost konstrukce, vyjádřen vliv „amortizace“ prasnice, tj. rozdíl mezi nákladem na odchov prasnice a její realizací při brakování (viz schéma 4). Tento výpočet by bylo třeba učinit mimo uvedený nomogram a příslušně připočítat jako zvýšený náklad na odchované sele.

* * *

Je logické, že systém jednotlivých nomogramů je podřízen svému účelu. Uvedené nomogramy, i když vystihují základní souvislosti mezi parametry výroby a jejími výsledky v živočišné výrobě, slouží jako příklad. V případě nutnosti rozšíření okruhu zkoumání by bylo nutno určité nomogramy vhodně přizpůsobovat.

Chceme-li zvyšovat nadále ekonomickou efektivnost živočišné výroby, musíme se hlouběji zamyslet nad jejími ekonomickými výsledky a důkladně zkoumat vliv jednotlivých výrobních činitelů a jejich projevy.

Dokážeme-li reálně předvídat jejich působení v jednotlivých provozech, projeví se to v nemalých úsporách prostředků, ve vyšší ekonomické efektivnosti celé výroby.

Došlo dne 17. 9. 1965

Оценка мероприятий в животноводстве с точки зрения экономической эффективности

В статье рассматривается методика оценки экономической эффективности отдельных отраслей животноводства с комплексной точки зрения влияния всех факторов производства и указывает, каким образом с этой точки зрения оцениваются все проводимые в животноводстве мероприятия.

Вводимые мероприятия влияют на определенный фактор или группу факторов, что непременно отражается и на экономике производства. Резльтирующий эффект по существу представляет векторную равнодействующую влияния комплекса факторов.

После определения показателей экономической эффективности дана характеристика действия параметров производства, непосредственно влияющих на уровень производства продуктов животноводства.

Отличным от современной практики способом проводится подсчет себестоимости, в котором учитывается вся цепь затрат отдельных взаимно связанных секторов производства лишь в последнем продукте.

Влияние, характер действия и взаимообусловленность отдельных параметров производства выражены у производства молока, говядины и свинины (см. схемы), а на этой базе выведены и их математические зависимости (см. формулы). Рассматриваются возможности предположений и задач, которые можно решить на основе этих зависимостей.

Для быстрой ориентировки составлены соответствующие номограммы, при помощи которых графическим методом можно определить уровень экономической эффективности и изменения, которые произойдут при осуществлении мероприятий в животноводстве.

Метод исходит из стремления оказать конкретную помощь при принятии решения в производственном процессе. Основная мысль заключается в решении проблемы, в каком направлении следует воздействовать на отдельные параметры производства для достижения предполагаемого результата.

Если мы сумеем реально предвидеть их действия и заранее определять условия, при которых намечаемые мероприятия были бы эффективными, то это даст немалую экономию средств и труда.

Estimation of Measures Taken in Livestock Production with Regard to their Economic Effectiveness

In this paper the author states the methods applied for the estimation of the economic effectiveness in the different branches of livestock production from the complex point of view of the influence of all factors of production, and gives directions as to how to evaluate all measures introduced in livestock production from this point of view.

The introduced measures result in a change of a certain factors or of a group of factors, which must necessarily affect also the economy of production. The resulting effect in its substance is the vectorial resultant of the acting of a complex of factors.

After giving a definition of the indices of economic effectiveness the author describes the characteristic of the acting of the parameters of production, which directly influence the standard of the production of animal products.

In a way differing from the present practice the author performs the calculation of production costs investigating the whole chain of cost items in the different sections of production, each connected with the preceding one, up to the final product.

The influence, the character of their effects, and the mutual dependence of the different parameters of production have been stated for the production of milk, beef, and pork (see schemes), and on this basis their mathematical dependences have been derived (see formulae). The author deals with the possible considerations and tasks that may be solved on the basis of these dependences.

For the sake of a speedy orientation pertinent nomograms have been worked out, by means of which it is possible to evaluate, by means of the graphic method, the standard of the economic effectiveness and the changes taking place in the realization of these measures in livestock production.

The method is based on the endeavour to offer concrete support in the taking of decisions in the production process. The basic idea is the solution of the problem, in which direction we must influence and change the different parameters of production so that we should attain the desired result.

If we succeed in really foreseeing their effects and in defining beforehand the conditions under which the contemplated measures would be effective, then this will result in a considerable saving of means and of labour.

Inž. Zdeněk Poděbradský, CSc.

Vysoká škola zemědělská,
Suchbát u Prahy

■ Ďalší rozvoj výrobných síl nášho poľnohospodárstva má podľa uznesenia XII. sjazdu KSČ ani nie za celé desaťročie zaznamenať kvalitatívny vzostup na úroveň priemyslu. To nie je len problém techniky, ale aj ekonomiky, resp. spoločenských vzťahov, teda predovšetkým ľudí. Aj najmodernejšie stroje sa môžu stať bez dostatku zainteresovaných a kvalifikovaných pracovníkov len málo produktívnym výrobným prostriedkom.

Posledné roky ukazujú nesúlad medzi klesajúcim počtom pracovníkov, pri súčasnom zvyšovaní ich vekového priemeru, a rastom technickej základne poľnohospodárstva. Dôkazom sú viaceré ukazovatele. Je to popri stave, skladbe a produktivite pracovníkov najmä intenzita výroby, ďalej využívanie materiálo-technickej základne, vývoj podielu pomáhajúcich pracovníkov na celkovom objeme živej práce a podobne. Naznačenie sociologických aspektov reprodukcie pracovných síl v poľnohospodárstve oprieme o ich niektoré kvantitatívne i kvalitatívne tendencie.

VÝVOJ POČTU A VEKOVEJ ŠTRUKTÚRY PRACOVNÍKOV V POĽNOHOSPODÁRSTVE

Za necelé tri desiatky rokov sa znížil počet stálych pracovníkov v našom poľnohospodárstve o 60 %. V porovnaní s niektorými priemyselne vyspelými štátmi je to veľmi prudký pokles. Napríklad v USA zaznamenali v rovnakom období do roku 1960 úbytok o 35 %. Pritom však americký strojový park je tu čo do počtu a kompletnosti liniek a viacúčelovosti v prevahe nad našim súčasným stupňom mechanizácie. Kým u nás napr. pripadalo v rokoch 1956 až 1961 z celkových investícií do poľnohospodárstva na stroje 35 %, v NSR v tom istom období to bolo 73 %. Naše poľnohospodárstvo nie je ešte dostatočne vybavené rozhodujúcimi mechanizmami. V roku 1963 pripadlo u nás na 1000 ha poľnohospodárskej pôdy 22,6, vo Francúzsku 26 a v Holandsku 33 traktorov. Tieto rozdiely zatiaľ nevyrovnáva možnosť lepšieho využívania strojov v podmienkach našej veľkovýroby.

Za posledné tri roky poklesol o tretinu aj počet pomáhajúcich pracovníkov. Nepriaznivé dôsledky nevyváženého úbytku pracovníkov v poľnohospodárstve sú výraznejšie, ak si uvedomíme, že oproti predvojnovnej skladbe sa značne zmenila aj štruktúra osevu v prospech plodín náročných na ručnú prácu. Na Slovensku vzrástla napr. plocha cukrovej repy z niekdajších zhruba 30 tisíc až na 80 tisíc ha, čo je viac ako dvaaplnásobok. Obdobne prudko vzrástli aj

plochy ostatných technických plodín, zeleniny a vinohradov. Okrem toho stavy hovädzieho dobytku stúpili o 20 % a počet prasiat je zhruba trojnásobný. To všetko vyžaduje, vzhľadom na nedostatočnú mechanizáciu, mnoho živej práce. Na druhej strane tieto fakty umožňujú predpoklad, že ďalšie technické vybavovanie poľnohospodárstva bude aj naďalej uvoľňovať pracovníkov z tohto odvetvia.

Aj napriek podstatnému poklesu nespočívajú hlavné nedostatky v oblasti pracovných síl v poľnohospodárstve tak v nízkom počte pracovníkov, ako v ich nepriaznivej vekovej štruktúre, v nízkej úrovni kvalifikácie a v ich nerovnomernom rozmiestnení. V procese odčerpávania pracovných síl z poľnohospodárstva došlo k podstatnému presunu pracovníkov z mladších skupín do starších vekových kategórií. V rokoch 1958—1963 pokleslo v družstvách slovenských krajov zastúpenie mládeže do 20 rokov takmer na polovicu. Skupina od 40 do 60 rokov predstavuje zhruba polovicu a kategória nad 60 rokov narástla takmer na pätinu celkového počtu stálych pracovníkov. V dôsledku toho stúpol aj vekový priemer na vyše 46 rokov, z čoho u mužov, vzhľadom na ich zastúpenie, až na takmer 50 rokov.

V štátnom sektore poľnohospodárstva je zastúpenie vekových skupín do 20 a do 40 rokov, oproti družstvám, značne priaznivejšie. Naproti tomu majú družstvá dvaapokrát väčší podiel pracovníkov nad 60 rokov. Pokiaľ ide o pohlavie, v skupine do 20 a do 40 rokov prevládajú ako na družstvách, tak v štátnych podnikoch ženy nad mužmi. To sú náznaky feminizácie poľnohospodárstva a dôkazy, že priemysel odčerpáva nielen mladé sily, ale z nich predovšetkým chlapcov, čo disproporcie v skladbe pracovných síl poľnohospodárstva prehĺbuje, a to menovite s ohľadom na jeho technickú revolúciu.

Rozdielne je zastúpenie vekových kategórií aj v družstvách jednotlivých slovenských krajov. V Stredoslovenskom a Východoslovenskom kraji dosahuje mládež do 20 rokov zhruba len polovicu podielu Západoslovenského kraja. Na druhej strane majú v porovnaní so Západoslovenským krajom oba ďalšie kraje až trikrát vyšší podiel mladých ľudí v zamestnaneckom pomere oproti člen-skému.

Zo všetkých uvedených faktov možno usúdiť, že početný stav a veková skladba stálych pracovníkov v našom poľnohospodárstve vcelku odrážajú spoločenské postavenie tohto odvetvia v národnom hospodárstve, úroveň jeho výroby i ekonomiky, stupeň jeho spriemyselnenia, resp. mimopoľnohospodárske pracovné príležitosti vcelku a v jednotlivých oblastiach (podľa stupňa ich spriemyselnenia) zvlášť.

ORGANIZOVANÝ NÁBOR MLÁDEŽE DO POĽNOHOSPODÁRSTVA

Reprodukcii pracovných síl, zlepšenie ich vekovej skladby a zvýšenie kvalifikácie rieši od roku 1958 organizovaný nábor mládeže do poľnohospodárstva, zavedenie jej učňovského pomeru a ďalšie opatrenia. V slovenských krajoch sa pohybuje ročná náborová úloha od 10 000 do 15 000 chlapcov a dievčat. Táto kvóta plne zodpovedá okolo 3% ročnej požiadavke na reprodukciu pracovných síl a vzhľadom na perspektívny vývoj a potreby industrializovaného poľnohospodárstva by mala toto odvetvie uspokojovať. Stanovené kvóty náboru sa však dosiaľ plnili sotva na dve tretiny a učňovský pomer len na polovicu. Konečný efekt je ešte nižší, pretože značná časť získanej mládeže odchádza z poľnohospodárstva po 1—2 rokoch, prípadne aj neskoršie.

Hľadali sa rôzne príčiny tohto javu, i keď neide len o československý, ale svetový problém; má však v sebe i niečo špecifického. Pred niekoľkými rokmi

bola domnienka, že hlavný dôvod je v nedostatočnej kultúrnej vybavenosti dediny. Rozsiahla práca prof. inž. dr. Jána T a u b e r a už v roku 1958 poukázala na otázky mládeže v poľnohospodárstve ako na komplexnú a diferencovanú problematiku viacerých aspektov, ktorú treba posudzovať v rôznych závislostiach. Po XII. sjazde KSČ sa chápe tento problém v širších súvislostiach. Uskutočňujú sa opatrenia v zlepšení niektorých materiálnych, resp. sociálnych podmienok.

V snahe prispieť aspoň získaním ďalších podnetov pre hľadanie komplexnejšieho riešenia problematiky pracovných síl, so sociologickým pohľadom, vykonalo sociologické oddelenie VÚZE v Prahe a VÚPE — pobočky v Bratislave anketu o niektorých súčasných otázkach nedostatku mladých ľudí v poľnohospodárstve, menovite v jednotných roľníckych družstvách.

STRUČNÝ METODICKÝ POSTUP

Pre získanie názoru zodpovedných funkcionárov poľnohospodárskych podnikov na túto problematiku sme volili dotazníkovú metódu typu doporučovanej ankety. Išlo prakticky o informatívnu sondu. Dotazník pozostával zo šiestich otvorených a polouzavretých otázok.

V podstate išlo o hlavné príčiny tohoto javu, o účinnosť opatrení politických a hospodárskych orgánov, o konkrétne príčiny odchodu mladých ľudí z anketovaného podniku (prostredie, spôsob práce, výška zárobku, úroveň bývania, občianskej vybavenosti), o počet, spôsob získavania a podmienky udržania mládeže (organizačné, pracovné, kultúrne a vôbec spoločenské pomery, pracovné zaradovanie, možnosti získavania kvalifikácie) v dotazovanom družstve alebo štátnom majetku. Kontrolné otázky sa dotýkali návrhov na odstránenie uvádzaných príčin.

Dotazník dostalo 45 predstavenstiev družstiev (takmer 2 %) a 12 riaditeľstiev štátnych majetkov (asi 15 %) na Slovensku. Okrem poľnohospodárskych podnikov sme kvôli verifikácii oboslahi aj riaditeľstvá ZDŠ v príslušných obciach.

Sústredili sme sa na mládež do 20 rokov. Objektívny základ otázok (počty mladých ľudí, dôchodok, bývanie, vybavenosť a iné), ich vzájomná kontrola a verifikovateľnosť znížili moment subjektívnosti, čím sa výsledky ankety stali podkladom pre určitú pracovnú orientáciu a podnetom pre hlbšiu analýzu a praktické závery. Odpovede sú vo viacerých aspektoch zaujímavé nielen z hľadiska sociológie, ale aj — a myslím predovšetkým — z hľadiska poľnohospodárskej ekonomiky.

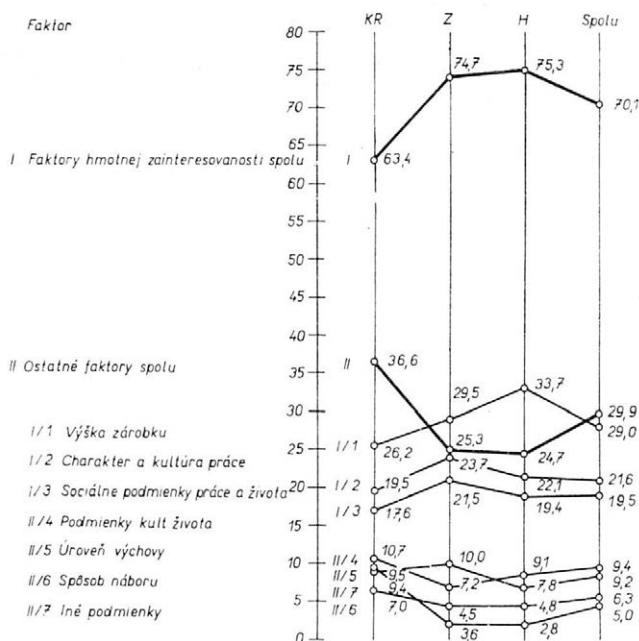
SPRACOVANIE ANKETY

Pri spracovaní ankety sme s jej výsledkami narábali ako so súborom odpovedajúcich družstiev a majetkov. Pretože otázky dotazníka nepredpokladali zisťovanie syntetických ukazovateľov výsledkov hospodárenia oboslaných podnikov, zvolili sme ich triedenie podľa výrobných oblastí. Uvedomujeme si v tomto smere kvalitatívne nepresnosti, ale metodika ankety iné triedenie nepredpokladala. Odpovede na každú otázku sme kvantifikovali. Z ich frekvencie, resp. totožnosti a podielu na celkovom množstve všetkých odpovedí, sme určili poradie dôležitosti uvádzaných príčin nedostatku mladých ľudí v poľnohospodárstve a návrhov na ich odstránenie. Nakoniec z celkového kvantifikovania odpovedí na všetky otázky vyplynula váha vplyvu jednotlivých faktorov na súčasnú problematiku poľnohospodárskej mládeže.

Analýza, syntéza a preskúmanie vzťahov medzi obsahom jednotlivých faktorov umožnili aj ich určité zoskupenia. V našom prípade ide o zastúpenie faktorov hmotnej zainteresovanosti (v širšom zmysle) do jednej a ostatných spoločenských faktorov do druhej skupiny. Prirodzene, uvádzanie viacerých rovnorodých faktorov na spoločného menovateľa nemôže znamenať ich skupinovú izoláciu, pretože práve len všetky spolu a vo vzájomnom ovplyvňovaní vytvárajú sociálnu realitu, do ktorej nahliadla aj predmetná anketa.

VÝSLEDKY ANKETY

Vyššie uvedenú váhu vplyvu jednotlivých faktorov a ich skupín zvlášť v družstvách a zvlášť vo štátnych majetkoch ukazujú nasledujúce grafy.



Ku skupine „faktorov hmotnej zainteresovanosti“ (I) sa viaže výška zárobku, resp. dôchodok, charakter a kultúra práce (sezónnosť, smennosť, technika a technológia) a sociálne podmienky práce a života (sociálne zariadenie na pracovisku, sociálne zabezpečenie, byty a občianska vybavenosť). Označené sú I (1–3) vo ŠM I (1, 2 a 4).

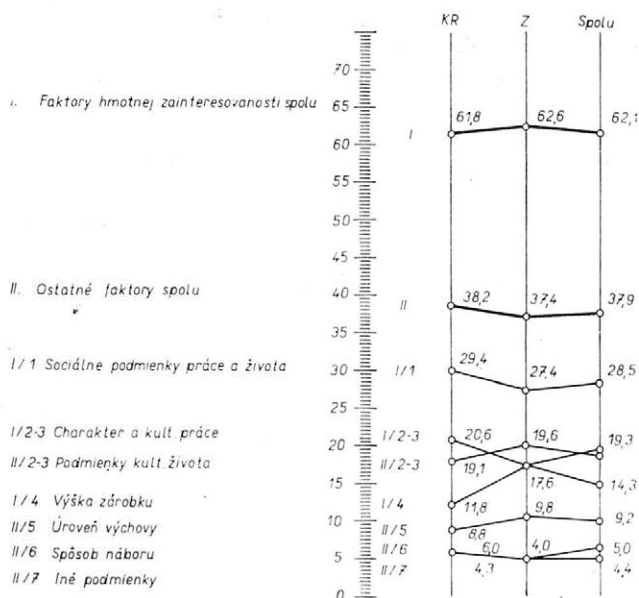
„Ostatné faktory“ (II) pozostávajú z podmienok kultúrneho a spoločenského života (vybavenosť pracoviska i dediny hmotnou kultúrou), úrovne výchovy (v komplexe: rodina, ZDŠ, POU, resp. odborná poľnohospodárska škola), spôsobu náboru (konkrétneho získavania mládeže pre poľnohospodárstvo) a iných spoločenských podmienok. Označené sú II (4–7) vo ŠM II (3, 5–7).

Váhu jednotlivých faktorov i ich skupín, zhody alebo rozdiely v ich vplyve na družstvá alebo štátne majetky ukazujú hodnoty znázornené v grafoch.

1. Najväčšiu váhu vplyvu na družstvách má faktor zárobku, resp. dôchodku, ktorý docielil v ankete vôbec absolútne najviac odpovedí a tým aj ich najvyšší, až 29% podiel. Podľa odpovedí nedocieľuje na anketových družstvách ani

nie tak forma, ako hlavne výška hmotného záujmu úroveň ostatných odvetví národného hospodárstva, menovite primeraných odvetví priemyslu. Tým sa stávajú práca a životné uplatnenie mladého človeka v jednotných roľníckych družstvách v prvom rade menej príťažlivé.

Vo štátnych majetkoch má najväčšiu váhu vplyvu faktor sociálnych podmienok práce a života. Pozostáva predovšetkým z bytového problému a vybavenosti pracovníka sociálnymi zariadeniami. Svojou hodnotou, 28,5 % všetkých odpovedí, takmer dosiahol faktor dôchodku na družstvách. To na jednej strane zvyrazňuje nedostatočnú účinnosť dôchodkov v družstvách a kladný vplyv odmeňovania za prácu na štátnych majetkoch. Na druhej strane poukazuje na akútnosť výstavby bytov a sociálnych zariadení na týchto podnikoch. Ak vezmeme do úvahy často excentrickú polohu štátnych majetkov, grupovanie ich pracov-



ných síl zo širokého, ba i ďalekého okolia a viacročnú zanedbanosť výstavby bytov i sociálnych zariadení na ich hospodárstvach, potom, pri vyššej úrovni odmeňovania oproti družstvám, je tento faktor logicky na prvom mieste.

2. Ako ďalší je faktor charakteru a kultúry práce. V družstvách má hodnotu 21,6 %, vo štátnych majetkoch 19,3 %. Je to faktor, ktorý sa dotýka ako biologických, tak technických a technologických i organizačných otázok výroby a ich ekonomických i sociálnych dôsledkov. Biologický charakter podmieňuje sezónnosť výroby, koncentrácia a špecializácia, včítane techniky, jej technológiu, organizáciu práce, pracovný čas, zavádzanie dvojsmennosti, zmierňovanie vplyvov sezónnosti a iné prvky, ktoré približujú poľnohospodárstvo priemyslu. Práve v týchto základných predpokladoch treba vidieť podmienky pre vyššiu kultúru práce a kultúrnosť jednotlivých pracovných procesov. Preto nemožno tento faktor odlúčiť od základných materiálnych stimulov práce.

Nie je bez zaujímavosti, že hodnotou je tento faktor zhodne na druhom mieste ako na družstvách, tak na majetkoch. Je to pochopiteľné, pretože biologický charakter výroby, jej technická vybavenosť a úroveň technológií sú v oboch sektoroch zhruba na rovnakej úrovni.

3. Svojou váhou na treťom mieste je podľa odpovedí v družstvách faktor sociálnych podmienok práce a života. Oproti štátnym majetkom, ktoré ho uvádzajú na prvom mieste, má nielen váhovú, ale aj obsahovú rozdielnosť. Nie je to bytový problém, ktorý ho v tomto prípade charakterizuje. Družstvá uvádzajú, že mládež do 20 rokov má poväčšine pomerne slušné bývanie u rodičov. Aj občianska vybavenosť dediny je lepšia ako na odlahľých hospodárstvách štátnych majetkov. Odpovede však upozorňujú, že bytový problém narastá aj na dedinách v súvislosti s neskorším zakladaním nových rodín mladých poľnohospodárov.

Ťažiskom tohto faktora v družstvách sú však sociálne zariadenia pracoviska a sociálne zabezpečenie družstevných roľníkov. Odpovede poukazujú na súvislosť sociálnych dávok alebo dôchodkov s výškou príjmov. Preto je tu úzka návaznosť na faktor dôchodku, ktorý je v družstvách svojou váhou na prvom mieste. Len pokiaľ ide o sociálne zariadenia pracovísk, sú tieto zložky faktora, menovite pre mládež, rovnako akútne na družstvách i na majetkoch.

Vo štátnych majetkoch sú na treťom mieste podmienky kultúrneho a spoločenského života. Patrí sem predovšetkým vybavenosť majetku a širšieho životného prostredia hmotnou kultúrou a do určitej miery aj možnosť využívania tejto vybavenosti. V tomto smere nadväzuje tento faktor aj na charakter a kultúru práce.

Práve tento faktor indikuje, v porovnaní s ostatnými a vo vzťahu medzi oboma sektormi, zaujímavé korelácie.

Vo štátnych majetkoch predstihujú váhu vplyvu dôchodku kultúrne a spoločenské podmienky (v družstvách je vzťah opačný), ktoré sa tu vyrovnávajú faktoru charakteru a kultúry práce a delia sa s ním o druhé a tretie miesto.

Tento pomer iste odráža vo svojej podstate rozdielnu vybavenosť dediny a mimo sídla aglomerácie položeného štátneho majetku hmotnou kultúrou. Avšak rozdiel nie je vyslovene len v tejto okolnosti. Možno usúdiť, že vcelku nižšia úroveň odmeňovania v družstvách do určitej miery tlmí požiadavky na kultúrny a spoločenský život, resp. jeho podmienky, a v priemere vyššie príjmy v štátnych majetkoch ich aktivizujú. Rozdielnu váhu má však tento faktor aj v jednotlivých družstvách. V podmienkach dobre prosperujúcich družstiev pôsobí značne výraznejšie ako v zaostávajúcich. Takto vzniká vzťah, ktorý možno zhruba charakterizovať: čím vyššia úroveň dôchodkov a kultúry práce, tým lepšie predpoklady pre bohatší kultúrny a spoločenský život, ale tým aj vyššie nároky na vybavenosť pracoviska či bydliska hmotnou kultúrou, na intenzívnejší, náročnejší kultúrny a spoločenský život. Tento vzťah možno charakterizovať ako príklad vzájomného ovplyvňovania základne a nadstavby.

4. Faktor kultúrnych a spoločenských podmienok v družstvách je svojou váhou, ako je to už vyššie naznačené, vcelku na štvrtom mieste. Nie že by nebol pre družstevnú mládež dôležitý. V jednotlivých prípadoch najlepších družstiev má vyššie hodnoty. Avšak fakt, že jeho váha poklesla v odpovediach všetkých družstiev spolu, v porovnaní s faktorom dôchodku, zhruba na tretinu, a že na majetkoch je naopak výraznejší ako zárobok, pri existencii rozdielnej úrovne odmeňovania v oboch týchto sektoroch, len potvrdzuje vzťahy naznačené v predchádzajúcom odstavci. Možno preto predpokladať, že so zvyšovaním úrovne dôchodkov a sociálnych podmienok práce i života v družstvách bude tu svojou váhou narastať aj faktor kultúrnych a spoločenských podmienok.

Vo štátnych majetkoch je na štvrtom mieste faktor výšky zárobku so 14,3 % odpovedí. Nemožno povedať, že je to činiteľ s malou hodnotou, hoci dosahuje sotva polovicu váhy sociálnych podmienok vo svojom sektore a oproti dôchodku

v družstvách je taktiež zhruba len polovičný. To na jednej strane násobí váhu sociálnych a kultúrnych podmienok práce i života v tomto sektore, na druhej strane pomerne výrazne poukazuje na rozdielne zhodnocovanie poľnohospodárskej a inej primeranej práce v ostatných, menovite priemyselných odvetviach národného hospodárstva.

5. Na kultúrne a spoločenské podmienky nadväzuje faktor výchovy. Je tu pojatý komplexne a zahŕňa ako rodinu, tak základnú deväťročnú, ako aj odbornú poľnohospodársku školu. Svojou váhou je na piatom mieste, a to zhodne v družstvách i majetkoch a s rovnakými hodnotami, po 9,2 %. To svedčí o rovnakej podstate výchovnej problematiky našej mládeže smerom k poľnohospodárstvu.

Aj keď je účinok výchovného úsilia psychicky značne závislý od objektívnych materiálnych a spoločenských podmienok jeho cieľa a naše súčasné poľnohospodárstvo je oproti technicky progresívnejším odvetviam zatiaľ v nevýhode, mala by podľa odpovedí výchovná práca zohrávať ďaleko aktívnejšiu úlohu v prípade mladých ľudí pre poľnohospodárstvo než dosiaľ. Váha tohto faktora vzrastá s vedomím, že vo výchovnom procese ide vlastne o človeka ako živú a tým aj rozhodujúcu zložku výrobných síl a ich ďalšieho rozvoja. Na ceste spriemyselnovania nášho poľnohospodárstva a celkového rozvoja jeho ekonomiky nadobúda preto výchovná práca jeho pracovných záloh o to väčší a základnejší význam.

6. Váhou 6,3 % v družstvách a 5 % vo štátnych majetkoch je spôsob nábora na šiestom mieste v oboch sektoroch.

Svojou podstatou nadväzuje tento faktor na predchádzajúci. Ide v ňom hlavne o niektoré negatívne momenty širokým a komplexným výchovným procesom nepripraveného zadelovania absolventov ZDŠ do poľnohospodárstva. Tieto javy sú skôr následkom ako príčinou nesprávnej praxe nábora. No i napriek tomu nemožno nevidieť, že rozhodnutie sa mladého človeka pre poľnohospodárstvo by malo byť výsledkom dlhého cielavedomého výchovno-psychického procesu a nie dôsledkom aktu náhodného rozhodnutia či príkazu zo strany príslušných orgánov alebo inštitúcií. Životnosť takto „získaných“ mladých pracovníkov je v družstvách obyčajne veľmi krátka.

O kladných výsledkoch dlhodobého pôsobenia ZDŠ na žiakov a o vplyve jej organizovanej spolupráce s poľnohospodárskym podnikom hovorí práca prof. inž. dr. J. T a u b e r a a dr. J. Š i r m e r a „*Průzkum povahy a zájmů žactva devítileté školy v Suchdole u Kutné Hory*“.

7. Konečne najmenšiu váhu má niekoľko rôznych iných podmienok, ktoré ani spolu a tým viac jednotlivé neznamenajú pozoruhodnejšie faktory. Ide v nich jednak o administratívne zabezpečenie návratu niektorých roľníkov, resp. družstevníkov, ktorí odišli do priemyslu, o vzťahy medzi družstvami a národnými výbormi a o niektoré ďalšie otázky. Vzhľadom na ich jednotlivé veľmi nízku špecifickú váhu a predchádzajúce faktory možno nielen ich hodnoty, ale aj obsah zanedbať.

Zoskupenie faktorov do už naznačených dvoch skupín umožňuje uvažovať o ich niektorých širších závislostiach.

I. Dôchodok, charakter a kultúra práce, spolu so sociálnymi podmienkami, tvoria faktory hmotnej zainteresovanosti v širšom zmysle. V družstvách dosahujú spolu až 70,1 %, v štátnych majetkoch 62,1 % všetkých odpovedí. Teda váha vplyvu týchto základných faktorov je veľmi vysoká u oboch sektorov (zhruba dve tretiny odpovedí), i keď v družstvách je špecificky najťažším prvok výšky

priameho zárobku a v štátnych majetkoch bývanie, s ostatnými sociálnymi za-
riadeniami pracoviska.

II. Kultúrne a spoločenské podmienky, výchova, nábor a niektoré iné pod-
mienky vytvárajú faktory ostatných spoločenských podmienok. V podstate obsa-
hujú širšie a komplexne chápaný proces výchovy, spolu s jeho hmotnou vyba-
venosťou. V družstvách ich reprezentuje 29,9 % a v štátnych majetkoch 37,9 %
všetkých odpovedí.

Pokiaľ ide o výrobné oblasti, majú faktory hmotnej zainteresovanosti stúpa-
júcu tendenciu, ostatné spoločenské faktory klesajúcu tendenciu, a to smerom od
kukuričného a repárskeho, cez zemiakársky na horský výrobný typ. To vcelku
nasvedčuje lepším hospodárskym výsledkom a celkovej ekonomickej konsolidova-
nosti poľnohospodárskych podnikov v typicky rovinatých poľnohospodárskych juž-
ných oblastiach oproti hornatým severným skôr priemyselným oblastiam Slo-
venska. Na druhej strane však tieto vzťahy odrážajú aj dostatok pracovných síl
a určitú nedobudovanosť dediny v ešte nespriemyselných krajoch a nedostatočný
reprodukčný proces pracovníkov družstiev, hoci s lepšou vybavenosťou životného
prostredia, lenže v podmienkach dostatku atraktívnejších pracovných príležitostí
v priemysle.

Vzťahy medzi hmotnými a morálnymi stimulmi v sektoroch družstiev a štát-
nych majetkov, naznačené pri jednotlivých faktoroch, a so zreteľom už aj na ich
korelácie medzi výrobnými oblasťami, sa prejavujú aj pri celkovom posudzovaní
výsledkov ankety. To na jednej strane dotvrdzuje určujúcu úlohu faktorov hmot-
nej zainteresovanosti, ale na druhej strane aj ich organickú zviazanosť s faktormi
kultúry a výchovy v anketovej problematike poľnohospodárskej mládeže.

ZÁVER

Úlohou predmetnej ankety, ako sondy, bolo orientačne zistiť niektoré socio-
logické aspekty súčasnej spoločenskej problematiky poľnohospodárskej mládeže.
Spracovanie jednotlivých otázok, a najmä súborné kvantifikovanie odpovedí,
stanovilo váhu vplyvu a tým aj poradie jednotlivých faktorov, ktoré ovplyvňujú
terajší nedostatok mladých ľudí v poľnohospodárstve, menovite v jednotných roľ-
níckych družstvách. Konfrontácie výsledkov ankety s praktickou situáciou v poľ-
nohospodárskych podnikoch a poslednými komplexnejšími opatreniami politických
a hospodárskych orgánov pre zlepšenie podmienok existencie mládeže v poľnohos-
podárstve, nie sú v rozpore, naopak sú v súlade. To všetko platnosť záverov
ankety potvrdzuje a rozširuje.

Reprodukcia pracovných síl v poľnohospodárstve nie je jednostranný, ale
zložitý mnohojavový spoločenský proces. Má svoje hmotné, sociálne, kultúrne,
ideologické, psychologické a iné spoločenské aspekty.

Limitujúcim faktorom záujmu či nezájmu mladých ľudí o poľnohospodár-
stvo je hmotná zainteresovanosť, vyjadrená predovšetkým výškou zhodnotenia
práce, ale doplnená aj o jej celkové sociálne podmienky.

Na tento faktor úplne organicky nadväzujú kultúrne, prípadne ostatné spo-
ločenské podmienky, a to ako práce, tak života mladého človeka v poľnohospo-
dárstve a na dedine.

Faktory alebo skupiny faktorov sa vzájomne podmieňujú a dopĺňujú. Exis-
tujú zložité vzťahy medzi účinnosťou hmotnej zainteresovanosti v širšom zmysle
(jej obsahu i formy) a nárokmi i dosahom kultúrneho a spoločenského života.
S rastom industrializácie krajiny, resp. oblasti, sa tieto vzťahy zintenzívňujú aj

v poľnohospodárstve a vynucujú si jeho spriemyselnovanie a vyrovnávanie s primeranými odvetviami národného hospodárstva ako v oblasti výroby, tak odmeňovania práce, sociálnych, kultúrnych a ostatných podmienok života.

Nemožno nájsť presnú deliacu čiaru medzi komplexom hmotných a morálnych podnetov, medzi zánikom pôsobenia jedného a začiatkom účinku druhého faktora. Aj keď tu všeobecne platia dialektické vzťahy, spočívajúce na materialistickom princípe bytia a vedomia ako jeho odrazu, v každom poľnohospodárskom podniku budú váha vplyvu i vzťahy medzi jednotlivými faktormi alebo ich skupinami špecifické.

Riadenie ekonomiky poľnohospodárstva a každého jednotlivého podniku je nemysliteľné bez riadenia jeho reprodukčného procesu a pracovných síl. Anketa poukázala na širokú sociologickú zložitost' tohto procesu. Jeho základnou zložkou je dnes veľmi často používaná ekonomická kategória:

hmotná zainteresovanost', resp. jej sociologické chápanie: hmotná a morálna zainteresovanost'.

Aj napriek kladnej účinnosti niektorých posledných hmotných, sociálnych a kultúrnych opatrení, ktorá sa v reprodukčnom procese iste postupne prejaví, nabádajú výsledky tejto ankety ekonómov, ale aj sociológov, zaoberajúcich sa poľnohospodárstvom, preskúmať a teoreticky i prakticky prepracovať obsahovú štruktúru a minimálne účinnú hranicu hmotnej, resp. hmotnej a morálnej zainteresovanosti mladého človeka a pracovníka v poľnohospodárstve vôbec, menovite v sektore družstiev.

Došlo dne 20. 2. 1965

Некоторые социологические аспекты воспроизводства рабочей силы в словацком сельском хозяйстве

Работа содержит результаты анкеты о проблематике сельской молодежи до 20 лет в случайно выбранных с.-х. кооперативах и госхозах Словакии. По существу вопрос касается позиции и точки зрения ответственных работников этих объектов в отношении воспроизводства рабочей силы в комплексе аспектов: экономического, технического, организационного, социального, психологического и культурного.

Оценка всех ответов позволила установить следующий удельный вес влияний (величину, а при случае порядок) отдельных факторов, действующих на решение молодого человека за или против с./х. профессии в целом: размер заработка или дохода (в ЕСХК — уд. вес, величина или порядок — 1; в госхозах — 4); характер и культура работы (в ЕСХК — 2, в госхозах — 2), социальные условия труда и быта (в ЕСХК — 3, в госхозах — 1); культура и общественные условия (в ЕСХК — 4, в госхозах — 3); воспитание в комплексе семья + школа (в ЕСХК — 5, в госхозах — 5); способ набора на работу (в ЕСХК — 6, в госхозах — 6); др. факторы (в ЕСХК — 7, в госхозах — 7).

Различные заработки, социальные и культурные условия в ЕСХК и госхозах основываются на разной материальной заинтересованности и оснащении материальной культурой и зависимостью между ними. Чем выше уровень оплаты труда, тем выше требования молодежи к социальным и культурным условиям труда и быта в с.-х. предприятиях.

Работа показывает, что воспроизводство рабочей силы в сельском хозяйстве — не односторонний, а комплексный общественный процесс с действием экономических, технических, организационных, социальных, психологических и культурных аспектов.

Einige soziologische Aspekte der Reproduktion der Arbeitskräfte in der Landwirtschaft der Slowakei

Die Arbeit interpretiert die Ergebnisse einer Umfrage zur Problematik der Landjugend im Alter bis zu 20 Jahren in zufällig ausgewählten Landwirtschaftlichen Produktionsgenossenschaften und Staatsgütern der Slowakei. Es geht im wesentlichen um die Stellungnahme und Ansichten der leitenden Funktionäre dieser Betriebe zur Reproduktion der Arbeitskräfte und zwar komplex betrachtet: vom

ökonomischen, technischen, organisatorischen, sozialen, psychologischen und kulturellen Gesichtspunkt.

Die Analyse aller Antworten ermöglichte es, folgendes Gewicht (den Wert bzw. die Reihenfolge) des Einflusses der einzelnen Faktoren festzulegen, die den Jugendlichen bewegen, sich für die Landwirtschaft zu entscheiden oder diese als Beruf insgesamt abzulehnen: Höhe des Verdienstes bzw. Einkommens (in den LPG Gewicht, Wert oder Reihenfolge 1, in den Staatsgütern 4), Charakter und Kultur der Arbeit (in den LPG 2, in den Staatsgütern 2), soziale Arbeits- und Lebensbedingungen (in den LPG 3, in den Staatsgütern 1), kulturelle und gesellschaftliche Verhältnisse (in den LPG 4, in den Staatsgütern 3), Erziehung im Rahmen des Komplexes Familie + Schule (in den LPG 5, in den Staatsgütern 5), Art der Werbung (in den LPG 6, in den Staatsgütern 6), sonstige Faktoren (in den LPG 7, in den Staatsgütern 7).

Das unterschiedliche Gewicht des Einkommens, der sozialen und kulturellen Bedingungen in den LPG und Staatsgütern ergibt sich aus der differenzierten materiellen Interessiertheit und Ausrüstung mit materieller Kultur und weist auf den Zusammenhang zwischen diesen Faktoren hin. Je höher das Entlohnungsniveau ist, desto höher sind auch die Ansprüche an die sozialen und kulturellen Arbeits- und Lebensbedingungen der Jugendlichen in den Landwirtschaftsbetrieben.

Die Arbeit weist darauf hin, daß die Reproduktion der Arbeitskräfte in der Landwirtschaft keinen einseitigen, sondern einen vielseitigen gesellschaftlichen Prozeß darstellt, unter gleichzeitiger dialektischer Einwirkung der ökonomischen, organisatorischen, sozialen, psychologischen und kulturellen Aspekte.

Inž. Dušan Sagara

Výskumný ústav poľnohospodárskej
ekonomiky, sociologické oddelení.
pracovisko Bratislava, Suvorovova 16

■ Ke zvýšení produktivity práce v zemědělství a s ohledem na celkový nedostatek pracovních sil jsou stále hledány cesty ke snížení potřeby ruční práce u jednotlivých pracovních operací. Z těchto důvodů je snaha lidskou práci nahrazovat prací mechanizovanou. Proto také snížení potřeby ruční práce na jednotku produkce hodnotíme jako velmi důležitého ukazatele.

Třídění bramborové sadby v bramborářských oblastech za současných podmínek je příliš nákladné. V běžné zemědělské praxi je situace taková, že na vlastní sklizeň brambor připadá menší spotřeba živé práce než na třídění bramborové sadby. Důvod je v částečně vyřešeném mechanizovaném technologickém postupu sklizňových prací, zatímco sadba je dosud tříděna nevykonnými třídiči brambor TB-26 a nedokonalými třídiči brambor TB-80. V mnoha případech se dosud používá ručního třídění. Ekonomické hodnocení jednotlivých způsobů třídění ukazuje, jak je nezbytné přejít na nové způsoby třídění, aby se uspořila ruční práce.

METODIKA

Ve Výzkumném ústavu bramborářském v Havlíčkově Brodě byla v posledních třech letech sledována ekonomika třídění brambor. Srovnávány byly čtyři způsoby třídění brambor, a to: ruční, třídičem TB-26, třídičem TB-80 a na provizorní třídící lince. U jednotlivých způsobů třídění byla sledována spotřeba práce v hod/q a dále náklady v Kčs/q brambor, včetně spotřeby elektrické energie a amortizace strojové a stavební investice.

Údaje jsou získány z JZD Rozkvět-Kámen, JZD Věžnice, JZD Herálec a JZD Horní Krupá na okrese Havlíčkův Brod a z JZD Střítež a JZD Ždírec na okrese Jihlava. Z těchto družstev jsou výsledky uvedeny z devatenácti sledování ručního třídění, ze šesti sledování třídičem TB-26, z pěti sledování třídění třídičem TB-80 a ze dvou časových úseků sledování na třídící lince.

Při propočtech jsou sledovány náklady na cent tříděných brambor¹⁾ a na cent vytříděných brambor²⁾. K peněžnímu vyjádření nákladů na třídění bram-

1) „Tříděnými bramborami“ rozumíme veškeré množství brambor, které je dováženo z pole ke třídění.

2) „Vytříděnými bramborami“ rozumíme čistou sadbu vytříděnou velikostně podle ČSN 46 2045 — Sadba brambor. Nadsadba a podsadba (hlízy nad a pod normou stanovenou velikost) a poškozené hlízy jsou oddělené od čisté sadby.

bor byla živá práce ohodnocena ve všech případech pro možnost srovnání částkou 3,70 Kčs/hod. U všech způsobů třídění brambor byly pro srovnatelnost započítány do nákladů tyto pracovní operace: nahazování do koše třídiče (mimo ruční třídění), třídění, pytlování a naložení na vůz.

Spotřeba elektrické energie u třídiče TB-26 činí podle sledovaných údajů 1,10 kWh za jednu hodinu provozu, což při výši 0,30 Kčs/kWh činí 0,013 Kčs na q tříděných brambor.

Spotřeba elektrické energie u třídiče TB-80 byla v propočtech brána rovněž 1,10 kWh za hodinu provozu, což činí 0,010 Kčs/q tříděných brambor.

Spotřeba elektrické energie u provizorní třídící linky činí podle časových snímků 2,10 kWh za hodinu provozu, což činí 0,010 Kčs/q tříděných brambor. Spotřeba elektrické energie je zjištěna přímo v JZD Rozkvět-Kámen v průběhu provozu třídící linky.

Amortizace třídiče TB-26 při 10 % ročním odpisu činí 267 Kčs. Při průměrném výkonu 3200 q tříděných brambor za sezónu činí odpis 0,196 Kčs/q tříděných brambor.

Amortizace třídiče TB-80 při 10 % ročním odpisu činí 1000 Kčs. Při jeho průměrném výkonu 4200 q tříděných brambor za sezónu činí odpis 0,238 Kčs/q tříděných brambor.

Amortizace provizorní třídící linky je počítána z pořizovací částky strojového vybavení, která činí 18 500 Kčs, a z pořizovací částky přístavku (provizorní přístřešek se zásobníkem), která činí kol 11 000 Kčs. Při 10 % ročním odpisu ze strojového vybavení činí amortizace 1850 Kčs a při 5 % odpisu ze stavební části 550 Kčs, celkem 2400 Kčs ročního odpisu. Při průměrném výkonu provizorní linky 10 000 q brambor za sezónu činí odpis 0,240 Kčs/q tříděných brambor. Výše ročního odpisu strojového vybavení i stavební části byla stanovena JZD z investiční hodnoty, kterou má pro své kalkulační výpočty. Náklady na opravy nebyly v propočtech brány v úvahu s ohledem na skutečnost, že jsou v různých případech různě vysoké.

Náklady jsou závislé na zacházení se strojem, jeho údržbou a kvalitou materiálu na stroji a mohou dosahovat a v některých případech i přesahovat částku celoročního odpisu. Podle těchto individuálních podmínek v praxi musí být ještě uvedené náklady na třídění zvýšeny. Teoreticky je možno počítat náklady na opravy ve výši 50–80 % částky z ročního odpisu.

ZPŮSOBY TŘÍDĚNÍ BRAMBOR

Ruční třídění

Velké množství sadby ukládané v kretech a ve sklepech, které nebylo možno v pracovní špičce při podzimní sklizni vytřídit na předběžných skládkách, je dosud tříděno v jarních měsících ručně. Příčiny ručního třídění:

- a) malé krechy, kde nejsou vyhovující podmínky k využití třídičů brambor,
- b) krechy značně vzdálené od zemědělského objektu, kde není rozvod elektrické sítě,
- c) poruchovost třídičů,
- d) nedostatek třídičů a snížení kvality hlíz poškozováním na drátěných nechráněných sítích třídiče.

Potřeba práce ve sledovaných případech se pohybovala v poměrně úzkém rozsahu kolem průměru 0,745 hod/q, takže směrodatná odchylka ze sledovaných měření činila jen 0,169. Jak je patrné z tabulky IV, vyžádá si ruční třídění velkého množství živé práce, a proto je naprosto neekonomické.

Třídění třídičem TB-26

Na třídění bylo třeba celkem 10–13 pracovníků. Průměrný výkon činil 26 q tříděných brambor za hodinu. Proti ručnímu třídění přináší tento způsob značnou úsporu ruční práce, kterou snižuje o 41,9 %. Hodnocení tohoto způsobu třídění bylo sledováno při třídění z krechtů a z předběžných skládek. Zpravidla dva pracovníci nahazovali vidlemi brambory do přijímacího koše transportéru, který dopravuje brambory na síta třídiče, šest pracovníků přebírá chorobné a poškozené brambory na přebíracím pásu, dva až tři pracovníci zajišťují manipulaci pytlovaných brambor a jeden pracovník odsunuje podsadbu, nadsadbu a poškozené hlízy.

Třídění třídičem TB-80

Při dosavadní organizaci práce při třídění brambor nesplnil tento třídič stanovené požadavky. Především byla poškozována sadba kolmým plechem rozdělovacím třídícím stůl a na nechráněných drátěných sítích. Mimo značné poškození hlíz nevznikla při třídění brambor podstatná úspora živé práce a ani nebyl podstatně zvýšen výkon. Úspora živé práce proti třídění třídičem TB-26 je nevýrazná a činí jen 8,2 %. Za obvyklé organizace práce se koš transportéru u třídiče TB-80 plní ručně, takže nelze dosáhnout vyššího výkonu. Příčina nízkého výkonu třídiče není tedy v konstrukční vadě, jak se často uvádí. Konstrukčním nedostatkem je především vysoké mechanické poškození hlíz. Obsluha vyžaduje v průměru třináct pracovníků, kteří za hodinu vytrídí kol 35 q brambor. Obsluha třídiče je zpravidla rozdělena takto: tři pracovníci nahazují brambory do koše transportéru, šest pracovníků odstraňuje ze sadby poškozené a chorobné hlízy na třídícím pásu, tři pracovníci pytlují a váží sadbové brambory a jeden pracovník odsunuje podsadbové a nadsadbové brambory. K dosažení vyššího výkonu třídiče nestačí tři pracovníci dostatečně rychle plnit jeho koš. Zvýšit počet pracovníků pro plnění koše na čtyři není možné pro nedostatek místa. Proto bylo nutno hledat cesty, jak zvýšit výkon třídiče brambor a snížit potřebu živé práce na cent brambor. Značným pokrokem jsou zaváděné třídící linky podle návrhu Výzkumného ústavu zemědělské techniky v Řepích s ověřováním ve Šmolovech i jinde, a jednoduché třídící linky podle návrhu Výzkumného ústavu bramborářského v Havlíčkově Brodě, které byly v provozu v roce 1964 v JZD Rozkvět-Kámen. Výsledky z ověřování různých technologických linek jsou obsaženy v závěrečné zprávě Výzkumného ústavu zemědělské techniky v Řepích u Prahy v roce 1965 s názvem: „*Výzkum technologie posklizňové úpravy a skladování brambor v zemědělských závodech*“.

Třídění na provizorní lince

Podle návrhu Výzkumného ústavu bramborářského postavilo JZD Rozkvět v Kameni u Habrů v roce 1964 provizorní třídící linku na sadbové brambory.

Linka přináší tyto výhody: odpadá namáhavé nahazování brambor do koše transportéru třídiče, přísun brambor je rovnoměrný a plynulý a odpady při třídění samočinně padají do přistaveného vozu. Příjmový zásobník vyrovnává nerovnoměrný přísun brambor z pole. Vodorovný transportér pod zásobníkem dopravuje brambory na šikmý transportér, který je vynáší do zvýšeného podlaží, na němž je postaven třídič TB-80. Další postup při třídění na třídící lince je stejný jako u normálního třídění. Výhoda je v tom, že odpady jsou sváděny do přistaveného vozu pod zvýšeným podlažím a také pytlovaná sadba je skluzem nakládána na vůz. Celá linka je umístěna v jednoduchém přístavku u stodoly. Podle podmínek zemědělského závodu je možno provizorní třídící linku řešit různým způsobem³⁾.

Na provizorní třídící lince v JZD Rozkvět-Kámen byl v roce 1964 zjišťován výkon dvěma časovými snímky. Počet pracovníků proti běžnému třídění třídičem TB-80 snížen nebyl, ale změnou technologie se podstatně zvýšil výkon třídiče TB-80, zapojeného do třídící linky. Výsledkem bylo zvýšení produktivity práce.

Organizace práce linky: Jeden pracovník reguluje přísun brambor ze zásobníku na vodorovný dopravník, šest pracovníků vybírá na přebíracím pásu, jeden pracovník pytluje podsadbu a čtyři až pět pracovníků zajišťuje výměnu pytlů. Výkon třídiče podstatně stoupl. Zatímco při normálním třídění třídičem TB-80 byl výkon kolem 35 q/hod, činil výkon třídiče TB-80, zapojeného do provizorní linky, 63,6 q a 69 q tříděných brambor za hodinu (průměr 66 q/hod) při obsazení dvanácti až třinácti pracovníky. Z celkového množství tříděných brambor bylo 61 % vytríděné sadby, 31 % nadsadby a 8 % podsadby. Vyššího výkonu bylo dosaženo rovnoměrným a stálým přísunem brambor. Přísun brambor na třídič nebyl závislý na výkonech pracovníků zajišťujících plnění koše transportéru u třídiče.

Úspora živé práce v hod/q na provizorní třídící lince proti normálnímu třídění na třídiči TB-80 činí 24,5 %. Toto snížení živé práce vzniklo především vyšším výkonem třídiče. Další snížení živé práce na cent brambor může vzniknout úsporou jednoho pracovníka u podsadby a další jeden až dva pracovníci mohou být uspořeni zavedením automatické váhy u pytlování sadby. Namáhavá fyzická práce při plnění koše byla třídící linkou zcela odstraněna. Výkon třídiče byl vyšší o 31 q za hodinu. Při pracovním využití 30 pracovních dnů za sezónu při desetihodinovém provozu za den se zvýší množství tříděných brambor o 9300 q. Úspora živé práce proti tradičnímu třídění třídičem TB-80 činí 0,183 hod/q. Podle celkového vyčíslení úspory živé práce v hod/q a zvýšeného množství tříděných brambor za stejné časové období vzniká pro zemědělský závod úspora sedmi pracovníků po dobu 30 pracovních dní při osmihodinové pracovní době. Teprve tímto vyjádřením vynikne přednost třídící linky, která pomůže snížit potřebu brigádnických sil.

EKONOMICKE VYJÁDRĚNÍ RŮZNÝCH ZPŮSOBŮ TŘÍDĚNÍ

Náklady na třídění brambor vyjadřuje tabulka I, z níž vyplývá, jak klesá nejen potřeba ruční práce v Kčs/q, ale i náklady v Kčs/q tříděných brambor. Náklady se v porovnání s ručním tříděním snižují u třídění třídičem TB-80 o 41 % a u třídění na lince o 66 %.

³⁾ Radil (1965) v článku „Třídící linky na brambory v zemědělských závodech“ v časopise Za vysokou úrodu č. 7 zveřejňuje různá schémata těchto linek.

I. Náklady na 1 q tříděných brambor v Kčs

Druh nákladu	Způsob třídění			
	ručně	TB-26	TB-80	třídící linka
Ruční práce	2,757	1,602	1,376	0,699
Elektrická energie	—	0,013	0,010	0,010
Amortizace	—	0,196	0,238	0,240
Přímé náklady celkem	2,757	1,811	1,624	0,949

Jak se ekonomicky projevuje doba splatnosti investic u různých způsobů třídění, můžeme vypočítat z tabulky II podle vzorce

$$d = \frac{IN_2 - IN_1}{PN_1 - PN_2}$$

kde:

- d = doba splatnosti investice v letech,
- IN_2 = investiční náklady nového způsobu třídění v Kčs/q,
- IN_1 = investiční náklady starého způsobu třídění v Kčs/q,
- PN_2 = náklady na nový způsob třídění v Kčs/q,
- PN_1 = náklady na starý způsob třídění v Kčs/q.

Doba splatnosti investic je propočtena v tabulce II, kde způsob třídění

- A značí třídění třídičem TB-26
 - B značí třídění třídičem TB-80
 - C značí třídění provizorní linkou
- srovnávací způsob
} srovnávané způsoby.

Z tabulky II vyplývá, že i vložené vyšší investiční prostředky mají u provizorní třídící linky rychlejší návratnost, a to za 2½ roku.

Základní ekonomické výsledky v tabulce I jsou uvedeny na cent veškerých tříděných brambor. Těmito náklady je však správné zatížit jen vytříděnou sadbu. Proto je nutné pracovní náklady, spotřebu elektrické energie a amortizaci přepočítat na cent vytříděné sadby (tab. III). Na efektivnosti třídění se velkou měrou podílí výtěžnost sadby. Čím je větší, tím jsou nižší náklady na cent vytříděné sadby. Zbytek brambor po vytřídění sadby z největší části slouží jako výrobní spotřeba v dalším procesu zemědělské výroby. Proto by nebylo správné vyšší cenou krmného odpadu zatěžovat následné zemědělské produkty.

V tabulce III jsou uvedeny náklady na různé způsoby třídění v přepočtu na různé procento výtěžnosti sadby.

Z uvedených údajů je zřejmé, že při pěstování sadbových brambor je nutné zajistit agrotechnikou maximální výtěžnost sadbových hlíz. Zde vyniká nutnost dodržování neustále zdůrazňovaného hustšího sponu výsadby, předčasného ukončení vegetace apod.

II. Doba splatnosti investic při různých způsobech třídění

Způsob třídění	Investiční náklady (IN) Kčs	Výpočty	Doba splatnosti roků (d)
A	Třidič TB-26 2 670,—	přímý náklad (PN_1) = 1,811 Kčs $W_s = 3\,200\text{ q}$ $IN = \frac{2\,670}{3\,200} = 0,834\text{ Kčs}$	—
B	Třidič TB-80 10 000,—	$PN_2 = 1,624\text{ Kčs}$ $W_s = 4\,200\text{ q}$ $IN_2 = \frac{10\,000}{4\,200} = 2,381\text{ Kčs}$ $B : A = \frac{2,381 - 0,834}{1,811 - 1,624} = \frac{1,547}{0,187} =$	8,3
C	Dopravníky 8 500,— Třidič TB-80 10 000,— Přístřešek $\frac{11\,000,—}{29\,500,—}$ Kčs	$PN_2 = 0,949\text{ Kčs}$ $W_s = 10\,000\text{ q}$ $IN_2 = \frac{29\,500}{10\,000} = 2,950\text{ Kčs}$ $C : A = \frac{2,950 - 0,834}{1,811 - 0,949} = \frac{2,116}{0,862} =$	2,5

Poznámka: W_s výkon za sezónu

III. Přímé náklady v Kčs/q vytríděné sadby podle její výtěžnosti při různých způsobech třídění

Výtěžnost sadby v %	Ručně	Třidič TB-26	Třidič TB-80	Třídící linka
80	3,446	2,264	2,030	1,186
70	3,939	2,588	2,320	1,356
60	4,595	3,019	2,707	1,582
50	5,514	3,622	3,248	1,898
40	6,893	4,528	4,060	2,373

V ý s l e d k y

Potřebu živé práce v hod/q tříděných brambor ukazuje tabulka IV.

Úspora živé práce podle těchto údajů ve srovnání s ručním tříděním brambor činí u třídění třidičem TB-26 41,9 %, třidičem TB-80 50,1 % a na provizorní třídící lince 74,6 %.

IV. Pracovní náklady v hod/q tříděných brambor

Způsob třídění	Potřeba živé práce v hod/q	Index (ruční třídění = 100)
Ručně	0,745	100,0
TB-26	0,433	58,1
TB-80	0,372	49,9
Provizorní třídící linka	0,189	25,4

Středisko pro normování a ekonomiku práce v zemědělství uvádí v Jednotných normativních pro sklizeň cukrovky a brambor (1964) spotřebu času u tříděče TB-26 na vytrídění centu brambor při průměrném počtu deseti pracovníků 2,39 minut, což v přepočtu je 0,399 hod/q. V průměru se vytrídilo 25,1 q brambor za hodinu. Při třídění tříděčem TB-80 je uváděna spotřeba času na cent brambor při průměrném počtu jedenácti pracovníků 1,80 minut, což v přepočtu je 0,330 hod/q. V průměru se vytrídilo 33,3 q brambor za hodinu. Schmitz (1963) rovněž poukazuje na vysoké pracovní náklady na třídění brambor, které činí asi 0,4 hod/q. I v dobře organizovaném zařízení činí spotřeba práce na třídění 0,3 pracovních hodin na cent hotového zboží, což je vysoká hodnota. Proto poukazuje na vhodné podmínky třídění brambor v centrálních velkotřídárnách, kde potřeba práce klesá asi na polovinu.

ZÁVĚR

1. Chceme-li plnit úkol — vyrovnat zemědělství na úroveň průmyslu, musíme ekonomicky vynakládat živou sílu u všech pracovních operací a tím zvyšovat produktivitu práce. Ekonomické výsledky u jednotlivých způsobů třídění brambor ukazují na nutnost vyřazení ručního třídění.

2. Třídící linky ukazují perspektivní směr k úspoře živé práce i návratnosti investic. K jejich zřízení je proto třeba využít všech možností adaptace dosavadních provizorních skládek i jiných staveb a nové bramborárny projektovat již s třídící linkou. Urychleně je nutno vypracovat jednoduchou dokumentaci pro zřízení provizorní třídící linky v různých aplikacích.

3. Pěstování sadby brambor zaměřit na největší procento výtěžnosti sadby hustším sponem výsadby a předčasným ukončením vegetace. Cílem je snížení nákladů na cent tříděných brambor.

4. K dalšímu snížení potřeby živé práce je nutno ke tříděči zařadit automatické váhy, zavést automatický přísun brambor pomocí dávkovacího stolu, čímž se sníží potřebný počet pracovníků při třídění o 3 až 4. Tím se ještě znatelněji zvýší produktivita práce a sníží náklady na třídění. Zařazením tříděče do třídící linky se zvyšuje výkon a odstraňuje se největší fyzická námaha.

5. Poškozování sadby na třídících sítích i na přebíracím stole u dosavadních tříděčů je nutno odstranit pogumováním drátěných sít a využít zkoušeného nového typu přebíracího stolu, jestliže se ve zkouškách osvědčí.

Došlo dne 7. 5. 1965

Literatura

1. MZLVH Praha - Středisko pro normování a ekonomiku práce v zemědělství: Jednotné normativy pro sklizeň cukrovky a brambor, str. 222-223, 1964. — 2. KALINA a kolektiv: Výzkum technologie posklizňové úpravy a skladování brambor v zemědělských závodech. Výzkumný ústav zemědělské techniky, Řepy u Prahy, Závěrečná zpráva 1965. — 3. RADIL. Třídící linky na brambory v zemědělských závodech. Za vysokou úrodu, č. 7, str. 260-261, 1965. — 4. SEDLÁK a kolektiv: Výzkum velkovýrobní technologie sklizně brambor. Výzkumný ústav zemědělské techniky, Řepy u Prahy, dílčí zpráva 1963. — 5. SCHMITZ J.: Verfahren für die Lagerung und Aufbereitung von Kartoffeln. Referát přednesený na konferenci Evropské společnosti pro výzkum brambor v Pise, 1963.

Экономика разных способов сортировки посадочного картофеля

Как у всех рабочих операций, так и у сортировки картофеля правильным технологическим процессом можно понизить затрату ручного труда на единицу готового продукта.

В статье автор экономическим путем сравнивает затрату живого труда в час/ц при ручной сортировке, сортировке картофелесортировкой ТВ-26, ТВ-80 и при сортировке на временной сортировочной линии. У этих способов сортировки приводятся прямые расходы в кронах на центнер (кр./ц).

Результаты взяты у нескольких кооперативов, а средние данные оцениваются на основе девятнадцати наблюдений ручной сортировки, шести наблюдений картофелесортировки ТВ-26, пяти наблюдений картофелесортировки ТВ-80 и двух отрезков времени сортировки на временной сортировочной линии.

Трудовые затраты в час/ц даны в пересчете на весь сортируемый картофель и составляют: ручная сортировка — 0,755 час/ц, картофелесортировка ТВ-26 — 0,433 час/ц, картофелесортировка ТВ-80 — 0,372 час/ц и временная сортировочная линия — 0,189 час/ц. Трудозатраты охватывают лишь собственно сортировку, в них не входят подвоз и отвоз картофеля.

Прямые расходы в кр./ц, в которые входят трудовые затраты, электроэнергия, амортизация машин и строительной части временной сортировочной линии, составляют: ручная сортировка — 2,757 кр./ц, картофелесортировка ТВ-26 — 1,811 кр./ц, картофелесортировка ТВ-80 — 1,624 кр./ц и временная сортировочная линия — 0,949 кр./ц. Подсчетом охвачен весь сортируемый картофель, включая картофель мелче и крупнее установленной нормы посадочного материала и остальные отходы. Дальнейшие данные приводят прямые расходы в кр./ц в пересчете на выход посадочного материала.

Полученные результаты указывают на очень выгодные параметры сортировочной линии. В сельском хозяйстве при постоянной убыли рабочей силы ищутся пути повышения производительности труда путем экономии живого труда и увеличения его интенсивности. Создание сортировочных линий, снабженных автоматическими весами, и дальнейшее улучшение технологического процесса является одним из этих путей.

Ökonomik verschiedener Verfahren der Pflanzkartoffelsortierung

Wie bei allen Arbeitsgängen können wir auch beim Kartoffelsortieren durch ein geeignetes technologisches Verfahren den Bedarf an Handarbeit je Fertigerzeugniseinheit senken.

In dem vorliegenden Beitrag vergleicht der Autor vom ökonomischen Gesichtspunkt den Bedarf an lebendiger Arbeit je h/dt beim Sortieren von Hand, beim Sortieren mit der Sortiermaschine TB-26, mit der Sortiermaschine TB-80 und beim Sortieren mittels einer provisorischen Sortiermaschinenkette. Bei den genannten Sortierverfahren werden auch die direkten Kosten für das Sortieren in Kcs/dt aufgeführt.

Es werden die Ergebnisse aus einigen Genossenschaften angegeben und Mittelwerte von neunzehn Untersuchungen des Sortierens von Hand, von sechs Untersuchungen des Sortierens mit der Sortiermaschine TB-26 und von fünf Untersuchungen des Sortierens mit der Sortiermaschine TB-80 abgeleitet; ferner von zwei Zeitabschnitten des Sortierens mittels einer provisorischen Sortiermaschinenkette.

Der Arbeitsaufwand in h/dt wurde für alle Kartoffelsortierverfahren berechnet und beläuft sich: beim Sortieren von Hand auf 0,755 h/dt, mit dem Sortierer TB-26 auf 0,433 h/dt, mit der Type TB-80 auf 0,372 h/dt und mittels der provisorischen Sortiermaschinenkette auf 0,189 h/dt. Die Arbeitsaufwandswerte beziehen sich nur auf die eigentliche Sortierarbeit, keineswegs auf die An- und Abfuhr der Kartoffeln.

Die direkten Kosten in Kčs/dt, in die der Arbeitsaufwand, die Elektroenergie, die Amortisation der Maschinen und des baulichen Teiles der provisorischen Sortiermaschinenkette mit einbezogen sind, belaufen sich auf: 2,757 Kčs/dt für die Handarbeit, auf 1,811 Kčs/dt mit dem Sortierer TB-26, auf 1,624 Kčs/dt mit dem Sortierer TB-80 und auf 0,949 Kčs/dt mittels der provisorischen Sortiermaschinenkette. Die Berechnungen wurden für das gesamte Sortieren der Kartoffeln durchgeführt, einschließlich der Untersaat, Einsaat und des sonstigen Abfalls. Es werden ferner die direkten Kosten in Kčs/dt, umgerechnet nach der Ertragsleistung des Pflanzgutes, aufgeführt.

Die erzielten Ergebnisse weisen auf sehr günstige Parameter der Sortiermaschinenkette hin. In Anbetracht der ständigen Abnahme der Arbeitskräfte in der Landwirtschaft suchen wir Wege zur Erhöhung der Arbeitsproduktivität durch Einsparung an lebendiger Arbeit und Erhöhung der Leistungen. Die Errichtung von Sortiermaschinenketten, die mit automatischen Waagen ausgerüstet sind und die weitere Verbesserung des technologischen Verfahrens stellen einen dieser Wege dar.

Inž. František Rejlek

Výzkumný ústav bramborářský,
agrotechnicko-ekonomické oddělení,
Havlíčkův Brod

K některým termínům francouzské zemědělské ekonomiky

Při studiu francouzských děl o otázkách zemědělské ekonomiky se setkáváme s některými termíny, jejichž doslovný překlad nijak k pochopení látky nepomůže, protože tyto termíny vyjadřují pojmy, které jsou odlišné nebo zcela cizí pojmům naší zemědělské ekonomiky. Tato odlišnost pramení jednak z jiného společenského zřízení, jednak se projevují historické a krajové zvláštnosti a rozdílnosti technologického procesu. Též některé termíny se svou frekvencí a užíváním liší ve Francii a Švýcarsku. Dále se v poslední době užívá ve francouzském tisku mnoho zkratk, bez jejichž znalosti je jeho četba téměř nemožná.

Samotný název vědního oboru „zemědělská ekonomika“ se překládá „*économie rurale*“. *L'économie agricole* nebo *l'économie de l'agriculture* znamená ekonomika zemědělství. Stejně jako v češtině máme základní termíny země, půda, ve francouzštině máme jejich obdoby *terre* a *sol*, přičemž *sol* je půda ve smyslu pedologickém, rusky *почва*.

Ve Francii existuje soukromé vlastnictví půdy, jež se v průběhu historického vývoje utvářelo tak, že dnes asi 75 % podniků hospodaří na své půdě, kdežto 25 % podniků na půdě najaté. A zde se setkáváme se třemi pojmy: *mode de faire-valoir*, *propriété* a *exploitation*. *Mode de faire-valoir* znamená způsob hospodaření. *Propriété* znamená vlastnictví a je to právní pojem. Někdy se ho však užívá též ve významu statek, např. *grande propriété* — velkostatek. Naproti tomu *exploitation* může mít dva významy. První je užívání, využití, provoz a odtud odvozené se používá tohoto termínu též ve významu podnik, především ve Francii. Základní termín pro podnik je *entreprise*, kterého se však užívá převážně ve Švýcarsku. Někdy se užívají oba výrazy vedle sebe, např.: *l'exploitation agricole est une entreprise*. V běžném jazyku se užívá pro podnik několika pojmenování: *domaine*, *propriété*, *ferme*, *bien* atd. Z toho plyne, že výraz *l'exploitation* má význam obecnější, odpovídající našemu hospodářství. Proto i termín *ex-*

ploitant je nejlépe překládat hospodář. K výrazu *entreprise* — podnik je *entrepreneur* — podnikatel. Ovšem v běžném jazyku, ale i ve statistikách, se většinou objevují termíny *exploitation*, *exploitant*, které pak překládáme termíny „podnik, podnikatel“.

Užitek, který poskytuje vlastnictví, se rozeznává dvojí, a to: *fruits* a *produits*. *Fruits* je vše, co věc dává svým přirozeným určením. Rozeznávají se *fruits naturels*, *industriels* a *civils*. *Fruits naturels* jsou ty, které poskytuje příroda bez zásahu člověka, např. horské louky, mořské ryby apod. *Fruits industriels* vyžadují spolupráci člověka s přírodou, např. sklizeň pěstovaných plodin apod. *Fruits civils* jsou ty, které plynou z úmluv nebo smluv, např. nájemné apod.

Termín *produits* označuje právnický vše, co získáváme náhodně z vlastnictví, např. kámen z lomu apod.

S výrazem *propriété* je spojen i význam, s nímž se setkáváme i u nás, mluvíme-li o malém, středním a velkém podniku. Ve francouzštině tyto termíny znějí *petite*, *moyenne* a *grande propriété*, přičemž pod *petite propriété* se rozumí podnik do 10 ha, *moyenne propriété* od 10 do 40 ha a *grande propriété* nad 40 ha. Vedle toho se někdy pro označení podniku do 40 ha používá výrazu *propriété paysanne* — rolnické hospodářství. Vedle těchto výrazů se méně používá i výrazů *petite*, *moyenne* a *grande culture*.

Hospodaření na najaté půdě se děje na základě nájemní smlouvy, zvané *bail*. Vlastník půdy je *baillieur* a rolník-nájemce je *preneur*. Ve Francii existuje šest druhů nájemních smluv. Omezíme se jen na jejich výklad, protože příslušné ekvivalenty u nás chybějí. Druhy smluv jsou: *le bail à ferme*; *le bail à colonat partiaire ou métayage*; *le bail emphytéotique*; *le bail à convention ou à domaine congéable*; *le bail à complant*; *le bail à cheptel*.

Bail à ferme je nejužívanější nájemní smlouva. Spočívá v tom, že vlastník pronajímá své hospodářství farmáři na stanovenou dobu. Farmář platí nájemné na základě smlouvy. Zpravidla je hospodářství pronajímáno bez zařízení a dobytka, které si dodává farmář sám. Povinnosti obou stran jsou pak dále určovány zákonem, jinak je farmář svobodným podnikatelem.

Bail à colonat partiaire (métayage) je obdobou předchozí smlouvy s tou obměnou, že placení nájemného je nahrazeno podílem z výnosu. Jde tu vlastně o spojení nájemní smlouvy a smlouvy o společnosti. Vlastník pronajímá hospodářství a nájemce hospodáří. Podíl vlastníka na výnosu zpravidla nepřesahuje třetinu celkového výtěžku. Povinnosti obou stran jsou poněkud jiné, protože nájemce je ve své činnosti omezen. Vlastník má právo kontrolovat, které plodiny nájemce pěstuje. Jakmile je úroda zralá, musí o tom nájemce vlastníka uvědomit. Rozdíl je i v udržování hospodářství, ježto nájemce hradí jen běžnou údržbu, která není způsobena např. stářím budov apod. Nájemce tedy není již tak svobodný ve svém počínání jako farmář.

Bail emphytéotique — emphyteutická smlouva — je smlouvou dlouhodobou od 18 do 99 let. Užívá se jí hlavně při pronájmu panství, kde by vlastník těžko našel farmáře (*bail à ferme*). Nájemce je povinen platit nájemné, ale má rozsáhlá práva, jako měnit určení celku nebo části hospodářství, postupovat hypotéky a služebnosti, které dobou nepřesahují nájemní smlouvu. Naproti tomu je povinen dělat všechna zlepšení podle smlouvy.

Bail à convention ou à domaine congéable je smlouva, užívaná v některých částech Bretaně. Vlastník odevzdává tištěmu společníku k užívání pozemky a do vlastnictví stavby a budovy na základě poplatku za zápis. Původní vlastník si vyhrazuje právo kdykoliv převzít svůj majetek zpět za úhradu odhadnuté ceny budov a staveb.

Bail à complant je zvláštní smlouva, užívaná v kraji dolní Loiry, při níž vlast-

ník postupuje na neurčito nájemci vinice s tím, že je bude vysazovat a pěstovat.

Bail à cheptel (nájem dobytka) se nazývá taková smlouva, když jejím hlavním předmětem je dobytek. Jsou tři druhy těchto slov: *bail à cheptel simple*, *cheptel à moitié* a *cheptel de vaches*.

První spočívá v tom, že vlastník dává nájemci do péče dobytek, tj. k ustájení, krmení a ošetřování s tím, že každému připadne polovina nákladů a výnosů. Smlouva *cheptel à moitié* je nájemní smlouvou, podle níž dá každý společník k dispozici polovinu dobytka, který je společný pro výnos nebo ztrátu. Smlouva *cheptel de vaches* spočívá v tom, že vlastník dává nájemci krávy k ustájení a krmení. Krávy zůstávají majetkem vlastníka, který má právo na telata.

Dále se ještě objevuje termín *cheptel de fer*, železná zásoba dobytka, tj. takový stav dobytka, který ponechává vlastník farmáři nebo nájemci s tím, že po ukončení smlouvy je musí farmář zanechat ve stejné odhadní hodnotě. Slovo *cheptel* znamená jednak smlouvu o nájmu dobytka, jednak dobytek samý. Může však mít v různých slovních spojeních i jiný význam. Někdy mohou vzniknout i nejasnosti kolem termínu kapitál, který je v buržoazní ekonomické literatuře tradován jako věc, která dává výnos. Proto se v ekonomice rozeznává kapitál pozemkový (*foncier*) a kapitál podnikový neboli provozovací (*d'exploitation*). Provozní kapitál se pak dělí na: *capital mobilier, circulant, de roulement* a *de réserve*.

Capital mobilier — kapitál movitý, zahrnuje *cheptel vif*, tj. dobytek, a *cheptel mort*, tj. stroje, nářadí, motory aj. Zde má slovo *cheptel* odlišný význam od předchozích.

Capital circulant — oběžný kapitál, jsou takové předměty, které přecházejí přímo do provozu: krmivo, hnůj, hnojivo, osivo atd. Zapravené hnojivo, zaseté osivo apod. se považují často za kapitál pozemkový, protože zvyšují hodnotu půdy. Úroda a produkce, určená pro trh (obilí, brambory, mléko, máslo aj.) se zpravidla nepočítají do kapitálu, ježto nejsou činitelem výroby, nýbrž jejím výsledkem.

Capital de roulement — provozní kapitál, jsou obyčejně hotové peníze nebo vklady na běžných účtech a slouží k vyrovnávání sezónních rozdílů mezi výdaji a tržbou. Tak např. brambory se prodávají nejvýhodněji na jaře, proto je snaha pěstovat rané brambory, nebo koncem zimy, máme-li brambory v dobrém stavu a dobře uskladněny. Pro uskladnění a čekání na vyšší cenu je třeba mít určité částky v rezervě. Podle různých odvětví je tato doba více méně dlouhá.

Capital de réserve — rezervní kapitál, je pojem celkem snadný. Rozlišuje se na *capital d'amortissement*, *capital d'assurance* a *capital de provision*, tj. kapitál umořovací, pojišťovací a krycí. Tento poslední druh kapitálu se často zaměňuje s *capital de roulement*, od něhož se však liší jen frekvencí užívání. Zatímco *capital de roulement* se užívá v průběhu celoročního provozu, krycího kapitálu se užívá jen ve výjimečných případech, např. pro případ sucha, kdy chovatel by pro nedostatek píce musel prodat dobytek. Místo toho nakoupí z krycího kapitálu krmivo. Naopak v dobrých letech přikoupí dobytek, místo aby prodal krmivo za nízkou cenu apod.

Velkou pestrost termínů představují názvy cen, užívané zvláště v různých zemích v rámci EHS, které podléhají jednak tržním výkyvům, jednak jsou regulovány. *Prix de base* jsou ceny základní, které umožňují výrobcí prodat za nejvýhodnějších podmínek. *Prix garantis* — ceny zaručené, mají být podnětem pro zemědělce, aby pěstovali plodiny, na nichž má stát zájem. *Prix fixés* — pevné ceny, slouží pro orientaci pro výrobce. Mohou být stanoveny buď pro celou sklizeň nebo jen pro určité množství. *Prix de soutien* — podpůrné ceny, umožňují producentům prodat celou nebo část úrody stanoveným orgánům za tyto ceny, mají však plnou volnost prodat někomu jinému a za jiné ceny.

Prix indicatifs — směrné ceny, slouží k regulaci trhu. Tyto směrné ceny se všeobecně pohybují v limitu — *plancher et plafond* — podlaha a strop. Existují též *prix planchers garantis* — zaručené nejnižší ceny.

Aby byla zvýšena produktivita a aby rolníci viděli rentabilní způsob pěstování obilnin, byly vytvořeny průkopnické vesnice, tzv. *village-pilote*. Protože tyto vesnice měly úspěch, byly rozšířeny do celých pásem, zvaných *zone-témoin* (doslova: svědecké pásmo či pásmo-důkaz). Za „svědka“ (tj. kontrolu) se obvykle vybírá pásmo s nízkou nebo alespoň s neuspokojivou produktivitou, aby se v něm dal ukázat úspěch moderní zemědělské techniky a hospodaření. Chce se tím dokázat, že zlepšení jsou nejen možná, nýbrž i rentabilní pro ostatní hospodáře.

Ve Francii se rozlišují tři základní typy

zemědělských družstev: 1. družstva výrobní, zpracovatelská a prodejní; 2. družstva pro společný nákup potřebných strojů nebo materiálu, kterým se také někdy říká *syndicats* (syndikáty); 3. družstva *de services* (pro výkon služeb), která konají pro své členy různé úkony za minimální úhradu, např. společné využití strojů, umělá inseminace apod.

Ve statistikách se rozlišuje *population agricole* a *population rurale*. První zahrnuje osoby, žijící v domácnosti, jejíž hlava koná zemědělské práce jako hlavní povolání. *Population rurale* pak zahrnuje osoby, které žijí v obcích do 2000 obyvatel.

Pokud jde o stavovský titul zemědělského inženýra existují ve Francii dva tituly — *ingénieur agronome* a *ingénieur agricole*. *Ingénieur agronome* je diplomovaným inženýrem, který absolvoval *Institut Nationale Agronomique* v Paříži. *Ingénieur agricole* je absolventem jedné ze sedmi *École Nationale d'Agriculture*, které však stejně jako Institut mají charakter vysoké školy.

Z hlediska zemědělského rozdělení ministerstvo zemědělství území Francie na 9 velkých oblastí pro účely řízení a statistické, a to na: Bretaň a Normandii, Paříž-Sever, Východ, Středozápad, Střed, Alpy-Jura, Jihozápad, Centrální Massif, Středomořský jih s Korsikou.

Velký význam mají zkratky terminologického charakteru. Tak pod U. G. B. — *unité de gros bovin* (velká dobytčí jednotka), též zvaná *tête de gros bétail*, se rozumí zvíře o živé váze 600 kg nebo dva volci, dvě hříbata, 10 skopců, 20 jehňat, čtyři velká prasata, 70–80 slepic nebo králíků.

S. A. U. — *surface agricole utile* (zemědělská užitková půda) se dělí na T. L. — *terre labourable* (orná půda) a S. T. H. — *surface toujours en herbe* (stálá travnatá plocha).

U. T. H. — *unité de travail humain* (jednotka lidské práce), představuje práci dospělého člověka za 300 dní ročně.

Iniciálové zkratky se používají převážně pro názvy úřadů, institucí a různých organizací, např. I. N. S. E. E. — *Institut National de la Statistique et des Études Économiques*. Velmi zřídka se objeví zkratky typu „*Interlait*“ — *Société Interprofessionnelle du lait*.

Doc. dr. inž. Vladimír Brand

Vysoká škola zemědělská,
Suchbát u Prahy

Prof. dr. inž. Jan Krblich

Celá československá ekonomická veřejnost byla překvapena smutnou zprávou, že zemřel prof. dr. inž. Jan Krblich, profesor provozně ekonomické fakulty Vysoké školy zemědělské v Praze a dřívější dlouholetý ředitel Výzkumného ústavu zemědělské ekonomiky v Praze. Zemřel náhle, 15. srpna tohoto roku.

Profesor Krblich vstoupil hned v květnu 1945 do komunistické strany a aktivně se podílel na politickém životě v okruhu své působnosti. Jeho politické zaměření po roce 1945 bylo vyústěním jeho dřívější činnosti předválečné i v období války. Již v období okupace v roce 1943 se aktivně zúčastnil ilegální činnosti v komunistické skupině, která se zabývala přípravou pozemkové reformy, otázkami zásobování po skončení války a rekonstrukci zemědělské výroby. V té době spolupracoval s některými významnými komunistickými funkcionáři na úseku zemědělství, zejména s Antonínem Volavkou. V pražské květnové revoluci se aktivně zúčastnil povstání jako člen vojenské skupiny ve Vokovicích. Za tuto činnost obdržel zvláštní uznání.

Profesor Krblich patřil mezi první zemědělské ekonomy, kteří se po osvobození Československé republiky v roce 1945 dali plně do služeb Komunistické strany a stali se aktivními bojovníky za socialismus na úseku zemědělství a zemědělské ekonomické vědy. Byl jedním z prvních zemědělských ekonomů, kteří se snažili postavit zemědělskou ekonomiku a organizaci zemědělských podniků na marxistickou základnu a kteří se také v duchu marxismu-leninismu snažili problémy zemědělské ekonomiky a organizace zemědělských podniků vykládat.

V odborné činnosti se profesor dr. Krblich již velmi záhy po ukončení vysokoškolského studia na oboru zemědělského inženýrství České techniky v roce 1933 zaměřil na ekonomickou problematiku. Od roku 1937 působil jako pracovník Zemědělského ústavu účetnic-

ko-správového v Praze, z něhož v roce 1951 vznikl Výzkumný ústav zemědělské ekonomiky v Praze. V bývalém Zemědělském ústavu účetnicko-správového se zabýval nejprve studiem otázek taxačních a zvláště pak otázkou metod zjišťování provozní intenzity hospodaření zemědělských podniků. V tomto směru jsou významné některé jeho práce, zejména z oblasti zkoumání intenzity zemědělské výroby. Je to především práce „*Podový způsob zjišťování provozní intenzity v zemědělství*“, v níž vypracoval vlastní původní metodiku zjišťování intenzity zemědělského závodu. Významné jsou jeho práce i z předválečného období. Týkají se výnosových a kapitálových poměrů československého zemědělství. Po roce 1945 se zabýval speciálně studiem otázek produktivity práce v zemědělství, otázek využití geonomického výzkumu v plánování zemědělské výroby a studiem vyšších výrobních forem v zemědělství, zejména pak studiem ekonomických otázek zemědělské družstevní velkovýroby. Výsledky své odborné vědecké práce předložil prof. Krblich odborné ekonomické veřejnosti ve více než 40 původních pracích a studiích, které se zabývají nejrůznějšími úseky zemědělské ekonomiky a organizace zemědělských podniků. Mimoto uveřejnil na 400 různých článků, pojednání a referátů v odborném zemědělském tisku.

Prof. Krblich byl v období zakládání jednotných zemědělských družstev v Československé republice jedním z významných autorů, kteří se zabývali ekonomickou problematikou nově vznikajících JZD a kteří na základě vlastního studia eko-

nomiky JZD, na základě vědecké práce poskytovali státním i stranickým orgánům mnohé podklady pro uskutečnění družstevní politiky a poskytovali pro propagandistickou práci seriózní argumenty o výhodách zemědělské družstevní velkovýroby. V této souvislosti jsou především významné jeho publikované práce „*Výsledky společných polních prací JZD*“ a „*Ekonomický rozbor výrobních a finančních výsledků zemědělské družstevní velkovýroby*“. Problematice združstevňování zemědělské výroby a výhod družstevní zemědělské velkovýroby věnoval řadu dalších prací, které není možno v této krátké vzpomínce uvádět.

Odborná práce prof. Krblicha se nezaměřovala jenom na úzký okruh speciálně vědecké práce. Jako význačný pracovník v oboru zemědělské ekonomiky a organizace zemědělských podniků, i jako aktivní stranický funkcionář a významný přední pracovník ve výzkumném ústavu působil také jako člen mnoha různých stranických i odborných komisí, i jako člen mnoha komisí zřizovaných při ministerstvu zemědělství. Význačně se také podílel na práci dřívější Československé akademie zemědělských věd. Ministrem zemědělství byl v roce 1947 jmenován generálním sekretářem první konference slovanských zemědělských pracovníků, kteroužto funkci vykonával i při druhé konferenci v červnu 1948. Velký podíl měl prof. Krblich i na uspořádání slovanské zemědělské výstavy v roce 1948 v Praze, jako její generální sekretář. Tato výstava měla velký význam v posílení přátelských vztahů mezi zeměmi lidové demokracie a byla akcí velkého politického významu.

Významná úloha, kterou prof. Krblich hrál v ekonomické vědě i v organizaci vědecké práce a propagace výsledků vědy, byla oceněna při přeměně Zemědělského ústavu účetnicko-správového ve Výzkumný ústav zemědělské ekonomiky tím, že byl jmenován jeho ředitelem. V této funkci působil až do doby, kdy přešel na provozně ekonomickou fakultu Vysoké školy zemědělské v Praze jako její řádný profesor. Jako ředitel Výzkumného ústavu zemědělské ekonomiky tematicky a metodicky řídil práci všech pracovních skupin v ústředí ústavu v Praze, v odbočce v Brně a organizoval spolupráci s Výzkumným ústavem zemědělské ekonomiky v Bratislavě. Jeho zásluhy o rozvoj zemědělské ekonomické vědy byly oceněny i tím, že byl zvolen dopisujícím členem dřívější Československé akademie zemědělských věd, v níž vykonával funkci vědeckého sekretáře ekonomického odboru.

Již před rokem 1948, ale zejména jako ředitel Výzkumného ústavu zemědělské ekonomiky v Praze byl prof. Krblich ve velmi úzkém styku s Vysokou školou zemědělskou v Praze, na níž přednesl četné přednášky ze zemědělské ekonomiky a organizace zemědělských podniků jako její externí spolupracovník. Mnozí mladší pracovníci provozně ekonomické fakulty v Praze i mnozí pracovníci dnešního Výzkumného ústavu zemědělské ekonomiky se pamatují na jeho přednášky, které na vysoké škole proslavil a které byly velkým přínosem k jejich ekonomickému vzdělání. Zejména zde velmi aktivně působil po vzniku fakulty ekonomiky a organizace socialistického zemědělství v roce 1952 jako externí spolupracovník. Vedle prof. dr. J. Kofítky, děkana fakulty ekonomiky a organizace socialistického zemědělství, zajišťoval podstatnou část přednášek zemědělské ekonomiky. Jeho dřívější pedagogická práce i jeho vědecká úroveň byly důvodem, proč ekonomická fakulta Vysoké školy zemědělské v Praze, v níž se přetvořila dřívější fakulta ekonomiky a organizace socialistického zemědělství, nabídla prof. Krblichovi řádnou profesuru na této fakultě. Na žádost fakulty byl uvolněn z funkce ředitele Výzkumného ústavu zemědělské ekonomiky a jmenován a ustanoven řádným profesorem provozně ekonomické fakulty. Jako profesor Vysoké školy zemědělské se podílel na výchově nových zemědělských odborníků jak v řádném studiu, tak i ve studiu dálkovém. Současně působil na vysoké škole jako člen vědecké rady provozně ekonomické fakulty i jako člen vědecké rady Vysoké školy zemědělské v Praze.

Mnoho mladých vědeckých pracovníků, kteří se připravovali na vědeckou práci formou aspirantury, vděčí za svůj odborný růst prof. Krblichovi. Jako významný odborník byl po dlouhou dobu školitelem vědeckých aspirantů v oboru zemědělské ekonomiky a organizaci. Mnozí z nich zastávají dnes významné místo mezi zemědělskými ekonomy.

Když jsme se s prof. Krblichem loučili na jeho poslední cestě, byli jsme si vědomi, že ve svém díle nám zanechal kus svého života a že je naší povinností po jeho příkladu dál vědní obor zemědělské ekonomiky a organizace zemědělských podniků rozvíjet. Budeme vždy s vděčností a úctou vzpomínat jeho života i jeho díla.

Doc. inž. Ctibor Lédl, CSc.

Vysoká škola zemědělská, Praha

Obhajoby kandidátských a habilitačních prací na PEF VŠZ v Suchdole u Prahy v r. 1965

Na počátku roku byly obhajovány tři práce, obsahující dílčí výsledky ze státního výzkumného úkolu „Specializace a organizace výroby velkých zemědělských podniků“.

V habilitační práci inž. Čestmíra Suchého, CSc. „Příspěvek k určení základních směrů pro specializaci mlékařických socialistických zemědělských podniků“ je ukázáno, že rozhodujícím kritériem pro umístění konzumních mlékáren je rozmístění spotřebních středisek, zatímco výrobní mlékárny mají být podle své specializace umísťovány tam, kde je možno produkovat mléko potřebného složení a kvality. Jeví se účelným, aby většina mléka byla vyráběna ve specializovaných výrobních jednotkách a tyto jednotky ležely co nejblíže mlékárně, která mléko zpracovává. Specializace těchto jednotek na výrobu mléka by měla být úzká a organizace jejich výroby spjata s organizací výroby v mlékárně. Zdůrazněna je nutnost vytvořit ekonomické páky pro přiblížení výroby mléka k mlékárnám.

Inž. Vladimír Chalupný, CSc. obhájil habilitační práci na téma „Příspěvek k organizaci výroby řepného semene“. Práce vychází z teoretických základů specializace a koncentrace rostlinné výroby, které jsou aplikovány na uvedené odvětví. Na základě rozboru současného stavu výroby a vývoje mechanizace dochází autor k závěru, že v současné době je možno dosáhnout při částečné mechanizaci výsadby a sklizně semene zastoupení 8 % cukrovky na semeno na orné půdě. Podaří-li se dorešit mechanizovanou sklizeň semene (dvoufázová nebo přímá kombajnová sklizeň s předchozí desikací) a přenést přípravu sazeček do předjaří výstavbou vhodných sazečkáren, bylo by možno perspektivně dosáhnout koncentrace až 16 % z orné půdy. To by odstranilo zejména konkurenci technické

cukrovky a zvýšilo hmotný zájem podniků na tomto odvětví, dnes vysloveně okrajovém. V práci jsou rozebrány i různé organizační problémy vyšších stupňů specializace.

Poslední z těchto tří prací je kandidátská práce „Ekonomická hlediska specializace podniků na výkrm skotu“, kterou obhájil inž. František Trnka. V práci se zabývá stanovením optimální koncentrace jednotky na výkrm skotu pomocí metody hlavního článku, matematické a statistické metody a vytvářením modelů specializovaných podniků. Dospěl k závěru, že nejvhodnější v našich podmínkách je koncentrace o 700 kusech skotu na výkrm. V práci je rozpracován i konkrétní návrh organizační výstavby modelového závodu a posouzena jeho ekonomická efektivnost.

*

22. září 1965 obhájil kandidátskou práci inž. Lubomír Jirásek na téma „Příčiny a tendence rozdílů v důchodech JZD různých výrobních oblastí“. Autor zkoumal na příkladu všech družstev okresu Ústí nad Orlicí vliv rozdílné produktivity práce na tvorbu produkce v jednotlivých výrobních oblastech a účinnost soustavy ekonomických pák při vyrovnávání rozdílů. V práci bylo použito na 50 000 údajů zpracovaných strojně početní stanicí. Pomocí korelační analýzy byla zjištěna těsnost závislosti hlavních faktorů rozdílných důchodů. Závěry práce mají obecný význam a jsou aplikovatelné i na celé naše zemědělství.

*

22. května 1965 habilitovali před vědeckou radou fakulty inž. Ladislav Sobot-

ka, CSc., vědecký pracovník Výzkumného ústavu zemědělské ekonomiky, a dr. Pavel Vokatý, CSc., odborný asistent katedry zemědělské ekonomiky a práva. Práce inž. Sobotky „K některým problémům ekonomických vztahů mezi státem a zemědělskými závody“ byla věnována teoretickému rozboru tvorby nákupních cen zemědělských výrobků. Autor vychází z prvořadosti rozdělovací funkce a z tohoto hlediska zkoumá i účinnost jednotlivých modelů ceny. Práce obsahuje i celostátní rozbor účinnosti systému nákupu a cen, platného od roku 1960.

Práce dr. Vokatého je věnována otázkám pozemkových vztahů v socialistických zemích. Teoreticky se v ní osvětluje vlastnické a užívací právo k půdě, jak se vytvořily v jednotlivých zemích v období přechodu k socialismu a jeho výstavby.

Druhou prací z oboru právních věd je habilitační práce dr. Karla Šamohila, CSc. „Právní formy činnosti JZD“. Autor si všímá nedostatků dosavadní právní úpravy a přichází s náměty na novou legislativní úpravu, která by měla být uskutečněna novým zákonem o JZD.

Metodickým přínosem pro ekonomické hodnocení různých technologických postupů a provozních pokusů v rostlinné výrobě je habilitační práce inž. Aloise Slabého, CSc. „Ekonomické hodnocení technicko-organizačních opatření v rostlinné výrobě“.

Inž. Bořek Jankovský, CSc., pracovník katedry světového zemědělství a lesnictví, vložil do své habilitační práce „Zemědělství Alžírské lidové a demokratické republiky a problémy jeho přestavby“ své zkušenosti a poznatky z pobytu v této zemi. Práce je součástí výzkumného úkolu „Problémy zemědělství a lesnictví rozvojových zemí“.

Dále byly obhájeny dvě habilitační práce z oboru marxismu-leninismu a politické ekonomie, a to práce Vladimíra

Michajlova, CSc. „Vlastnictví a metodologické otázky politické ekonomie“ a Zdeňka Pátka, CSc. „K otázce charakteru a překonání rozporu mezi městem a vesnicí“.

Pozornosti zaslouží i kandidátská práce prom. ek. Otakara Macháčka z katedry statistiky a vědeckého programování na téma „Ukazatelé mechanizace zemědělské výroby“, která navazuje na komplexní výzkumný úkol „Soustava ekonomických ukazatelů čs. zemědělství“, a zejména pak poslední obhájená kandidátská práce prom. ek. Jaroslava Macha „O ekonomické podstatě družstevních důchodů“. Tato práce vymezuje základní formy prvotních důchodů ve družstvech a jejich zdroje. Dále jsou tu zkoumány faktory určující objektivní velikost nutného produktu družstevníka, zvláště se zřetelem k vlivům společenské dělby práce v oblasti osobní spotřeby a působení tržních vztahů na procesy vyrovnávání reprodukční potřeby družstevních rolníků a dělníků. Jsou též zkoumány formy prvotních důchodů družstevníka, zejména se zřetelem k objektivním funkcím záhumenku ve družstvu, a jsou analyzovány podmínky nutné k tomu, aby mohl být důchod ze záhumenku nahrazen. Konečně jsou v práci rozebrány vlivy působící na pohyb úhrnného důchodu družstevníka, zejména vliv úrovně důchodu na rozdělování pracovních sil při tzv. nevýhodnosti práce v zemědělství proti průmyslu. V závěru je učiněn rozbor vývoje struktury hrubého důchodu družstva ve srovnání s vývojem struktury hrubého důchodu průmyslového podniku.

Vysoký počet obhajovaných kandidátských a habilitačních prací v tomto roce a jejich dobrá úroveň ukazují na výrazně rostoucí úroveň vědecké práce na provozně ekonomické fakultě Vysoké školy zemědělské v Suchbátově u Prahy.

Všechny zmíněné práce jsou k dispozici v ústřední knihovně školy.

(vch)

NAJDĚNOVA P :

Stabilita technických koeficientů zemědělské výroby

Ústřední otázkou meziodvětvové bilance zemědělství je stabilita technických koeficientů nákladů, pokud jde o vliv sociálně-ekonomických a přírodně biologických faktorů. Výzkum působení těchto faktorů ukazuje, že koeficienty zemědělské výroby mohou být brány jako poměrně stabilní jenom ke srovnání krátkodobého časového úseku. Pro jejich změny vlivem technického pokroku a pro nelineární vztah mezi změnou objemu výroby, běžnými výdaji a investicemi je účelnější konat určité opravy před jejich využitím v operativním nebo perspektivním plánování. Tyto opravy musí kvantitativně vyjádřit opravdové změny určitého počtu faktorů a vytvořit reálnější strukturní matici nákladů za plánovací období. Nezávisle na tom, že evidence existující v současné době není přizpůsobena podmínkám sestavení bilance meziodvětvových vztahů a že k tomu je třeba dokonalejší výpočetní techniky, je její praktické využití možné a účelné, zejména, je-li metodologicky správně vyřešena otázka stability technických koeficientů zemědělské výroby.

— 1965, Ikon. i mechan. na selskoto stop. č. 5, str. 389-401

CHOJNACKA E.:

Diferencování cen vajec podle oblastí v Polsku

Předmětem tohoto článku je rozbor příčin, které vedou k oblastnímu diferencování cen vajec na volném trhu. Jednou z hlavních příčin různých cen vajec na volném trhu mezi jednotlivými oblastmi, mimo některých nivelizovaných cen, které nastoupily v posledních deseti letech, je nedostatečné zásobování vejci městského obyvatelstva formou zespolečenštění trhu s ohledem na poptávku. Toto zásobování je nedostatečné, zvláště v těch oblastech, kde v důsledku vysoké životní úrovně je poptávka vyšší než nabídka.

Autorka dochází k závěru, že pouhá existence nákupní ceny jako prostředku pro odnětí určitého množství vajec z jednotlivých místních trhů, bez náležitého zásobování měst tímto produktem prostřednictvím zespolečenštění trhu, je prostředkem jenom polovičatým, který vede k rychlejšímu růstu ceny na zespolečenštěných i na volných trzích.

— 1965, Zagadnienia ekon. rolnej č. 3, str. 49—72

VIŚNIEWSKI L

Vliv struktury investic na jejich efektivnost

Výzkum efektivnosti investic v rolnických hospodářstvích byl založen na výsledcích 64 hospodářství o výměře 7—15 ha, která vedou účetnictví pro Ústav zemědělské ekonomiky. Rozbor se vztahuje na období let 1961—62 a částečně let 1959—60. Hospodářství byla rozdělena do čtyř skupin podle intenzity investic.

Dosažené výsledky dovoluují závěr, že s mírou růstu intenzity investic v hospodářství klesá jejich efektivnost. Příčinu tohoto jevu vidí autor v nedostatečném spojení mezi rozšiřováním výstavby budov a počtem živého inventáře. Vypočtený

optimální vzájemný poměr materiálně-finančních investic (bez amortizace) k hodnotě základních prostředků činí v pokusném souhrnu asi 31 %.

V závěru autor ukazuje na prostředky, které zvyšují efektivnost investic. Jsou to: zvýšení úvěru na investice při odpovídajícím materiálním zabezpečení a zachování optimální proporce mezi výší investic a množstvím oběžných prostředků.

— 1965, Zagadnienia ekon. rolnej č. 3, str. 33—49

GAJEWSKI J., ZORYCHTA K.:

Otázka vhodnosti ekonomických řešení k reorganizaci zemědělských závodů

Autoři se v této práci snažili doplnit metody lineárního programování o nové prvky, které podmiňují stále větší pružnost optimálního plánu. Základní myšlenkou autorů byla snaha stanovit určitý počet variant tohoto plánu, avšak s tím, že je třeba je brát jako „prakticky optimální“, jelikož rozdíl mezi maximální hodnotou účelové funkce a hodnotou účelové funkce variant, které se přibližují optimálnímu cíli, je ve skutečnosti prakticky zanedbatelný. Při tomto přístupu k organizačnímu nebo reorganizačnímu plánu bude možné pružnější plánování.

Do dnešního dne bylo toho částečně dosaženo při posouzení několika posledních základních řešení, které je možno obdržet na základě interakcí metody „simplex“. Avšak těchto řešení není mnoho a mezi těmi, které existují, není zvláštního rozdílu. Ke zvýšení různorodosti komplexu řešení blízkých optimálnímu řešení, přizpůsobili autoři metodu „simplex“ tak, aby dovolila zvětšit soubor řešení a dosažení jejich větší různorodosti.

— 1965, Zagadnienia ekon. rolnej č. 3

HOFFMANN M.:

Nové ekonomické vztahy mezi socialistickými zemědělskými podniky a cukrovarnickým průmyslem

Uplatňování nových ekonomických vztahů mezi cukrovarnickým průmyslem a zemědělstvím se musí projevit i ve smluvních vztazích. Je možno využít zkušeností obvodů cukrovarů v Stralsundu a Halbrstadtu k opatřením směřujícím ke zvyšování produkce a produktivity práce. Dobrou organizací a spoluprací mezi zemědělstvím a cukrovarem lze řešit problémy jako přejímky, nakládání a dopravu řepy lépe a ve prospěch národního hospodářství.

— 1965, Wissenschaftlich-technischer Fortschritt č. 9, str. 393

ERK G.:

Použití cukrovky ke krmení z hlediska ekonomického

Předností používání cukrovky pro výkrm prasat místo krmných brambor spočívají především ve zvyšování produkce živin, ve snižování nákladů na krmiva o 30 až 40 % a ve snižování pracovního nákladu. Zkrmování čerstvé nebo uskladněné cukrovky se ukazuje jako nejlevnější forma. Měla by být uskladněna přes zimu až do jara a proto je třeba zlepšit způsoby uskladnění. Ve srovnání s krmným obilím působí zkrmování cukrovky snižování vlastních nákladů. Protože krmení cukrovkou umožňuje vyšší produkci vepřového masa na 1 ha plochy krmovin, je výnos z jednotky plochy vyšší, čímž je zaručen soulad mezi zájmy podniků a národním hospodářstvím.

— 1965, Wissenschaftlich-technischer Fortschritt č. 9, str. 400—402

REICHENHEIM H.:

Zintenzivnění pěstování cukrovky podle moderních zkušeností

Současné pracovní postupy s metodami zaměřenými na úsporu pracovního času jsou analyzovány a zkoumány, zda současně působí k zintenzivnění výroby. Bylo zjištěno, že nové pracovní postupy při obdělávání půd a přípravě půdy k seti slouží především ke zlepšení orby a pěstování rostlin, čímž se dosahuje zvyšování výnosů.

Moderní obdělávání půd, pěstování rostlin a sklizeň jsou zaměřeny k úspoře práce a při správném použití přinášejí vyšší výnosy než metody dříve používané.

— 1965, Wissenschaftlich-technischer Fortschritt č. 9, str. 395—397

RYCHLÍK T.:

Výrobní prostředky a chozrasčot v PGR (na státních statcích)

Autor se v této práci pokusil ukázat směr, jímž se bude vyvíjet chozrasčot, dále zhodnotit vliv, jaký budou mít navrhované změny na výsledky PGR za dané úrovně jejich výroby. Jde o nalezení hospodářského systému, který by působil do značné míry automaticky k tomu, aby závody, pokud jde o stanovení jejich výrobního programu, maximálně zaměřily svou činnost v souladu se společenským zájmem. To vyžaduje, aby každá hospodářská jednotka měla stejnou možnost k dosažení kladných ekonomických výsledků a praktické výsledky činnosti kolektivu byly v souladu s potřebami závodu a společnosti. Autor uvažuje o možnosti, jak zahrnout do výpočtů výrobních nákladů rentu a procenta z hodnoty výrobních prostředků a rovněž odpovídající část kolektivem a závodem dosaženého čistého důchodu. Zkoumá také možnost zahrnutí půdy do hodnoty výrobních prostředků a dále se snaží určit cenu půdy ve státních statcích na základě kapitalizace pozemkové renty. V závěru ukazuje možnost, jak výše uvedené změny v chozrasčotu státních statků realizovat.

— 1965, Zagadnienia ekon. rolnej č. 4, str. 3—23

PAŠKO S.:

Některé otázky odměny za práci v družstvech

Problém odměňování práce ve výrobních družstvech je autorkou zkoumán z hlediska těchto aspektů: 1. postavení odměny za práci při rozdělování produkce, 2. způsobu oceňování a realizace odměny. Způsob peněžní odměny může být použit v případě tradičního rozdělování důchodu i v případě pevné odměny za práci. Zavedení pevné peněžní odměny vyžaduje uskutečnění změn pokud jde o posloupnost a způsob rozdělení produkce, které jsou dosud používány (autorka uvádí tři varianty nového rozdělování).

Převážná většina polských družstev není dosud z ekonomických a organizačních důvodů schopna zavést pevnou peněžní odměnu, ale čím dál tím více se rozšiřuje forma rozdělení důchodu výlučně v penězích, založená na běžné denní mzdě a měsíčním zálohování.

— 1965, Zagadnienia ekon. rolnej č. 4, str. 85—95

VÝBĚR ČLÁNKŮ Z ČASOPISŮ

Ekonomika selského chovajstva (6/1965)

GUSEV N.: Upevnit ekonomiku kolchozů a sovchozů (str. 9-17).

SAVELJEV B.: Nový způsob nákupu zemědělských produktů (str. 18-27).

KOŽEVNIKOV P.: Rozvíjet zemědělství na stabilní materiálně-technické základně (str. 28-34).

KOTOV G.: Zvýšit výrobu obilovin a její rentabilitu (str. 35-46).

MAŠENKOV V., KARPUCHIN S.: Plánování a evidence produktivity práce (str. 47-59).

Metody výpočtu diferenciální renty v kolchozech (Materiály ze zasedání k této otázce (str. 89-97).

SIVOBOKOV A.: Nájemné vztahy v zemědělství Latinské Ameriky (str. 105-111).

(7/1965)

SEMEŇOV V.: Zdokonalit plánování vlastních nákladů v sovchozech (str. 77-81).

BARANOV M.: Akordně prémiová odměna za práci v kolchozech (str. 72-88).

GORDINSKIJ J., SLOBODIN V.: Ekonomická efektivnost čistých a zelených úhorů (str. 87-94).

Ekonomičeskije nauki (4/1965)

ILJIČEV A.: Racionální rozmístění a specializace zemědělství SSSR (str. 3-10).

SUSLOV S.: Komplexní řešení otázek specializace (11-16).

PRUSAKOV V.: Problémy pevné odměny za práci v kolchozech (str. 17-24).

ZAJCEV V.: Prohloubení procesu likvidace malých a středních farmářů v USA (str. 65-71).

NAZAROV V.: Monopolistické regulování zemědělství v západní Evropě a postavení rolnictva (str. 71-76).

OSIPOV L.: Zemědělství NSR v systému „Společného trhu“ (77-81).

MINEJEV V.: Ukazatel kvantitativního měření stupně specializace (str. 91-94).

Voprosy ekonomiki (7/1965)

MOROZOV V.: Rozvoj zbožně-peněžních vztahů na vesnici (str. 23-36).

LINĚJČUK J.: Některé otázky obratu zboží v rámci vesnice (str. 36-45).

(6/1965)

MACKIEWICZ V.: Ekonomické problémy dalšího rozvoje zemědělství (str. 3-13).

BERLIN M.: O ekonomice zemědělské výstavby (str. 14-22).

MENŠIKOVA M.: Úloha úvěru v rozvoji zemědělství (str. 138-148).

Ekonomista (3/1965)

DOBOSIEWICZ L.: Agrární revoluce v Alžíru (str. 656-666).

Zagadnienia ekonomiki rolnej (3/1965)

WOŚ A.: Nároky produkce individuál-

ních zemědělských hospodářství na kapitál (3-20).

MARINĚ W.: Pokus o ocenění efektivnosti meliorací trvalých luk a pastvin (str. 21-32).

WIŚNIEWSKI L.: Vliv struktury investic na jejich efektivnost (str. 33-38).

CHOJNACKA H.: Diferencování cen vaječ podle oblastí v Polsku (str. 49-72).

GEMEL A.: Rozvoj výrobních družstev v Maďarsku (str. 114-124).

PIOTROWSKA, HOCHFELD K.: Nové tendence rozvoje zemědělství v západní Evropě (zpracováno podle materiálu FAO) (str. 149-154).

RYCHLIK T.: Práce na metodice stanovení optimální velikosti sovkhozů v SSSR (str. 138-148).

Ikon. i mehan. na selskoto stopanstvo (4/1965)

NIKOLOV I.: Výrobní typy TKZCH (JZD) a specializace jejich zemědělské výroby (str. 334-348).

Zeitschrift für Agrarökonomik (6/1965)

SOMMERMAIER K.: Simplexová metoda (str. 179-181).

(7/1965)

SCHUBERT E.: Znázornění spojených výrobních procesů v propojovacích bilancích v zemědělství (211-213).

(9/1965)

DYHRENFURTH K.: Úkoly zemědělského výzkumu při vypracování vědeckých podkladů pro zdokonalení nového ekonomického systému v zemědělství jako odvětví národního hospodářství (str. 261-268).

MEUER A., HORN K.: Výsledky a problémy bilancí zemědělských pracovních sil v r. 1970 (str. 282-287).

Podepsáno k tisku 20. listopadu 1965

OBSAH

Géczy G.: Význam hodnotenia vplyvu prírodných činiteľov pri správnom zostavení plánov rastlinnej výroby	699
Poděbradský Z.: Posuzování opatření v živočišné výrobě z hlediska ekonomické efektivity	711
Sagara D.: Niektoré sociologické aspekty reprodukcie pracovných síl v poľnohospodárstve na Slovensku	725
Rejlek F.: Ekonomika různých způsobů třídění sadbových brambor	735

ZE ZAHRANIČÍ

Brand V.: K některým termínům francouzské zemědělské ekonomiky	744
--	-----

Z VĚDECKÉHO ŽIVOTA

Lédl C.: Prof. dr. inž. Jan Krblich	747
Chalupný V.: Obhajoby kandidátských a habilitačních prací na PEF VŠZ v Suchdole u Prahy v r. 1965	749

BIBLIOGRAFIE	751
--------------	-----

PŘÍLOHY

Matematické metody v zemědělství	
Statistické přehledy o čs. a zahraničním zemědělství	

СОДЕРЖАНИЕ

Гецзы Г.: Значение оценки влияния природных факторов при правильном составлении планов растениеводства (710). — Подебрадский З.: Оценка мероприятий в животноводстве с точки зрения экономической эффективности (723). — Сагара Д.: Некоторые социологические аспекты воспроизводства рабочей силы в словацком сельском хозяйстве (733). — Рейлек Ф.: Экономика разных способов сортировки посадочного картофеля (742). — За рубежом (744). — Из научной жизни (747). — Библиографии (751). — Приложения: Математические методы в сельском хозяйстве. — Статистические обзоры о чехословацком и заграничном сельском хозяйстве.

CONTENT

Géczy G.: The Importance of the Evaluation of the Influence of Natural Factors in the Case of a Correct Compilation of Plans of Crop Production (699). — Poděbradský Z.: Estimation of Measures Taken in Livestock Production with Regard to their Economic Effectiveness (724). — Sagara D.: Some Sociological Aspects of the Manpower Reproduction in Agriculture of Slovakia (725). — Rejlek F.: The Economics of Various Ways of Sorting of the Seed Potatoes (735). — From abroad (744). — From the scientific life (747). — Bibliography (751). — Supplements: Mathematical Methods in Agriculture. — Statistic Reviews of Czechoslovak and Foreign Agriculture.

INHALT

Géczy G.: Bedeutung der Bewertung des Einflusses natürlicher Faktoren bei der richtigen Planaufstellung in der pflanzlichen Produktion (710). — Poděbradský Z.: Beurteilung der in der tierischen Produktion getroffenen Maßnahmen vom Gesichtspunkt des ökonomischen Nutzeffektes (711). — Sagara D.: Einige soziologische Aspekte der Reproduktion der Arbeitskräfte in der Landwirtschaft der Slowakei (737). — Rejlek F.: Ökonomik verschiedener Verfahren der Pflanzkartoffelsortierung (742). — Aus dem Auslande (744). — Aus dem wissenschaftlichen Leben (747). — Bibliographien (751). — Beilagen: Mathematische Methoden in der Landwirtschaft. — Statistische Übersichten der tschechoslowakischen und ausländischen Landwirtschaft.

Redakční rada a redakce „Zemědělské ekonomiky“ připravují pro příští rok uveřejnění řady témat k závažným ekonomickým problémům. Pro vaši informaci uvádíme alespoň některá:

Především počítáme s publikováním příspěvků k ekonomickým otázkám řízení zemědělství, dále bychom chtěli naše čtenáře informovat o ekonomických zásadách nové soustavy řízení zemědělství v ostatních socialistických zemích, připravujeme vydání monotematického čísla pod souborným názvem „Zemědělství v ekonomickém rozvoji“, dále vydání komplexnějšího materiálu k otázkám vlastních nákladů a konečně k rozmístění zemědělské výroby v ČSSR s použitím nejen klasických metod, ale i moderních matematických metod.

Mimoto budou v novém ročníku i nadále vycházet přílohy „Statistické přehledy“ v nichž nově budou zařazeny i některé rozborů z jednotlivých okresů, a „Matematické metody v zemědělství“.

Nově bude uspořádána a jako samostatná rubrika zařazována „Bibliografie“ s přehledem nejzávažnějších článků a knih domácích i zahraničních produkce s anotovanými záznamy některých publikací apod.

Objednávky vyřizuje buď

POŠTOVNÍ NOVINOVÁ SLUŽBA

nebo

Ústav vědeckotechnických informací MZLVH

vydavatelství - propagace

Praha 2 - Vinohrady, Slezská ul. 7

MATEMATICKÉ METODY V ZEMĚDĚLSTVÍ

Stručný kurs pro zemědělské ekonomy

1965

PŘÍLOHA VĚDECKÉHO ČASOPISU „ZEMĚDĚLSKÁ EKONOMIKA“

Vydává ÚVTI MZLVH

MATEMATICKÉ METODY V ZEMĚDĚLSTVÍ

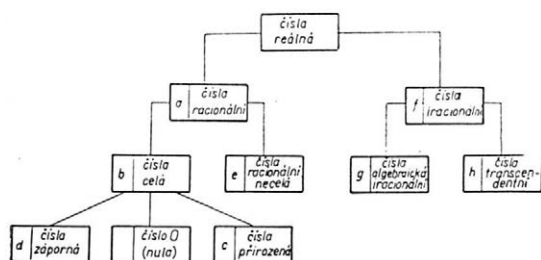
Stručný kurs pro zemědělské ekonomy

ÚVODEM

Protože stále více proniká matematika do zemědělství, rozhodla se redakční rada a redakce vědeckého časopisu „Zemědělská ekonomika“ uspořádat kurs pod názvem „Matematické metody v zemědělství“. Kurs je určen výzkumným a vědeckým pracovníkům, učitelům zemědělských škol, zemědělským ekonomům, inženýrům v praxi, i ostatním odborným pracovníkům v našem zemědělství a má je upozornit na matematický aparát, který existuje a kterého by měli užívat ve své praxi. Obsahem kursu je zopakování pojmů elementární a vyšší matematiky, některé části aplikované matematiky a největší část je věnována metodám operačního výzkumu. Třebaže kurs bude probíhat po dva roky, je jeho obsah tak náročný, že nelze jít v jednotlivých kapitolách do velké hloubky. Proto bude na konci každé kapitoly odkaz na literaturu. Případné nejasnosti nebo dotazy mohou čtenáři adresovat přímo redakci „Zemědělské ekonomiky“ v Praze 2 – Vinohrady, Slezská ul. č. 7.

I. Vybrané kapitoly elementární matematiky

1. REÁLNÁ ČÍSLA



1.1 Základní pojmy. Základním pojmem matematiky je množina.*)

Definice. Množina je souhrn nějakých předmětů, které se jmenují prvky množiny. Dále se budeme zabývat množinami, jejichž prvky jsou čísla a budeme je nazývat číselnými množinami.

a) Prvky množiny racionálních čísel jsou čísla, která dostáváme, dělíme-li vzájemně dvě celá čísla, přičemž dělitel musí být od nuly různý.

b) Prvky množiny celých čísel jsou ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...

1. Struktura množiny reálných čísel

c) Prvky množiny přirozených čísel jsou čísla 1, 2, 3, ...

d) Všechna čísla menší než nula tvoří množinu čísel záporných.

e) Množina čísel racionálních necelých je částí množiny (podmnožinou) racionálních čísel, jejichž prvky jsou všechny množiny racionálních čísel, které nepatří do množiny celých čísel (např. $\frac{1}{2}$, nebo $\frac{1}{3}$, jsou prvky množiny čísel racionálních necelých).

f) Prvky množiny iracionálních čísel jsou čísla, která nejsou racionální.

g) Množina iracionálních čísel, jejíž prvky jsou kořeny algebraických rovnic, se nazývá množina algebraických iracionálních čísel. (Např. 2, 3, ...)

h) Prvky množiny transcendentních čísel jsou čísla, která nelze vyjádřit jako kořeny nějaké algebraické rovnice (Např. π , $\log 2$). Prázdná množina**) (označení $\emptyset$) neobsahuje vůbec žádný prvek.

Poznámka: Všechna reálná čísla lze znázornit body na reálné ose číselné.

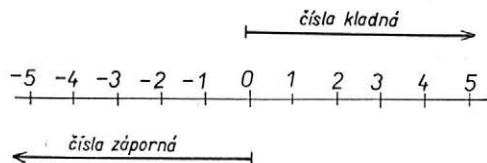
Všechna čísla větší než nula jsou prvky množiny čísel kladných. Všechna čísla menší než nula tvoří množinu čísel záporných. Všechny prvky množiny čísel kladných a číslo nula tvoří množinu čísel nezáporných. Všechny prvky množiny čísel záporných a číslo nula tvoří množinu čísel nekladných.

*) Čísla 1, 2, 3, 4, 5, tvoří množinu X, jejíž prvky jsou právě čísla 1, 2, 3, 4, 5, neboli, patří do množiny X. Symbolický zápis je např. $1 \in X$. Každé jiné číslo není prvkem množiny X. $1 \notin X$ (Čteme: Číslo jedna patří do množiny X. Nebo: Číslo jedna je prvkem množiny X.).

**) Opakem prázdné množiny je množina neprázdná.

Poznámka: O zápise, v němž písmena mají význam čísel, mluvíme jako o obecném zápise a o písmenech jako o obecných číslech.

Poznámka: Uspořádanou dvojici čísel reálných a_1, a_2 definujeme jako komplexní číslo $a_1 + a_2 i$. Číslo a_1 je reálná část, číslo a_2 imaginární část komplexního čísla. Ke znázornění nevystačíme s osou číselnou, ale potřebujeme celou rovinu.



2. Osa číselná

1.2. Sčítání a násobení reálných čísel

Základní početní výkony jsou dva: sčítání a násobení. Při sčítání (násobení) přiřazujeme dvěma daným číslům a, b (sčítanci resp. činitel) podle určitého předpisu třetí číslo (součet, součin).

Věta 1. 2. 1. Sčítání a násobení má tyto vlastnosti:

$a + b = b + a$	komutativní zákon
$a \cdot b = b \cdot a$	(zákon záměnnosti)
$(a + b) + c = a + (b + c)$	asociativní zákon
$(a \cdot b) c = a (b \cdot c)$	(zákon o sdružování)
$(a + b) c = ac + bc$	distributivní zákon
	(vytýkání před závorku)

Věta 1. 2. 2. Necht a je libovolné číslo. Potom platí

$$\begin{aligned} a + 0 &= 0 + a = a, \\ a \cdot 0 &= 0, \\ a \cdot 1 &= 1 \cdot a = a. \end{aligned}$$

Zvláštní případ

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0, \\ 0 \cdot 0 &= 0, \\ 0 \cdot 1 &= 1 \cdot 0 = 0, \\ 1 \cdot 1 &= 1, \end{aligned}$$

Věta 1. 2. 3. Sčítání a násobení kladných a záporných čísel

$$\begin{aligned} (+a) + (+b) &= +(a + b) = a + b; \\ (-a) + (-b) &= -(a + b); \\ (+a) + (-b) &= +(a - b), \text{ je-li } a > b; \\ (+a) + (-b) &= -(b - a), \text{ je-li } a < b; \\ (+a) \cdot (+b) &= +ab, \quad (+a) \cdot (-b) = -ab, \\ (-a) \cdot (-b) &= +ab, \quad (-a) \cdot (+b) = -ab, \end{aligned}$$

1. 2. 2. Odčítání a dělení reálných čísel

nepokládáme za základní početní výkony, neboť je můžeme definovat pomocí sčítání a násobení.

Definice: Jsou dána čísla a, b . Číslo c , pro něž platí $a = b + c$ nazýváme **rozdíl** čísel a, b . Píšeme $a - b = c$, kde a je menšenec, b menšitel, c — rozdíl.

Definice: Jsou dána čísla $a, b \neq 0$. Číslo c , pro něž platí $a = bc$, nazýváme **podíl** čísel a, b . Píšeme $a : b = c$, kde a je dělenec, b — dělitel, c — podíl.

Věta 1. 2. 2. 1.

$$\begin{aligned} (+a) - (+b) &= (+a) + (-b) = +(a - b), \text{ je-li } a > b; \\ (+a) - (+b) &= (+a) + (-b) = -(b - a), \text{ je-li } a < b; \\ (-a) - (-b) &= (-a) + (+b) = +(a - b); \\ (-a) - (-b) &= (-a) + (+b) = -(a - b); \\ (-a) - (+b) &= (-a) + (-b) = -(a + b); \\ (-a) - (+b) &= (-a) + (-b) = -(a + b), \text{ je-li } a > b; \\ &= +(b - a), \text{ je-li } a < b; \end{aligned}$$

*) Číslo b musí být vždy od nuly různé; výraz $\frac{1}{b}$ pro $b = 0$ nemá smysl.

Věta 1. 2. 2. 2.

$$\frac{+a}{+b} = + \frac{a}{b} ; \frac{+a}{-b} = - \frac{a}{b} ;$$

$$\frac{-a}{-b} = + \frac{a}{b} ; \frac{-a}{+b} = - \frac{a}{b} .$$

2. NEROVNOSTI

Charakteristickým znakem reálných čísel je, že je můžeme porovnávat podle velikosti. Je-li číslo a větší než b , zapíšeme $a > b$, je-li číslo a menší než b , zapíšeme $a < b$. Zápisy $a > b$, $a < b$ nazýváme **nerovnostmi** a $<$, $>$, značkami nerovností.

Věta 2. 1. Jsou-li a, b čísla, potom platí vždy jen jeden z těchto tří vztahů: $a = b$, nebo $a > b$, nebo $a < b$.

Věta 2. 2. Necht $a > b$, $b > c = >$ (čti: z toho plyne) $a > c$ (zákon tranzitivnosti).

Věta 2. 3. Je-li $a > b$, c je libovolné reálné číslo, potom $a + c > b + c$.

Věta 2. 4. Je-li $a > b$, $c > 0 = >$ $ac > bc$.

Věta 2. 5. Je-li $a > b$, $c < 0, = >$ $ac < bc$.

(Násobíme-li obě strany nerovnosti stejným záporným číslem, musíme změnit značku nerovnosti.)

Věta 2. 6. Je-li $a > b = >$ $-a < -b$. Provedme pro názornost důkaz věty 2. 6. Podle věty 2. 3. můžeme psát

$$a + (-a) > b + (-a) = > 0 > b + (-a) = >$$

podle věty 2. 3

$$(-b) + 0 > (-b) + [b + (-a)] = >$$

$$-b > -a = > \quad -a < -b \quad \text{c. b. d.}^*)$$

Poznámka: Násobíme-li obě strany nerovnosti nulou, přechází nerovnost v rovnost

$$a < b; c = 0 = > ac = bc \equiv 0.$$

Věta 2. 7. Je-li $a < b$, $c < d, = >$ $a + c < b + d$ (věta o sčítání nerovností).

Důkaz: Podle věty 2. 3 platí $a + c < b + c$, $b + c < b + d$,
a podle věty 2. 2. platí $a + c < b + d$ c. b. d.

Věta 2. 8. Jeli $a < b$, $c > d = >$ $a - c < b - d$ (věta o odčítání nerovností).

Důkaz: Necht $a < b$ potom podle věty 2. 6. je $-c < -d$. Podle věty 2. 7. platí
 $a + (-c) < b + (-d) = >$ $a - c < b - d$.

Věta 2. 9. Necht $0 \leq a < b$; $0 \leq c < d = >$ $a \cdot c < b \cdot d$ (věta o násobení nerovností).

Věta 2. 10. Necht $a > 0$, $b > 0$, $a < b = >$ $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Důkaz: $b - a > 0$; $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab} > 0$,
neboť čísel $(b - a)$ i jmenovatel ab jsou kladná čísla.

Z toho je zřejmé, že $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

^{*}) c. b. d. což bylo dokázat.

Věta 2. 11. Necht a, b, c, d jsou vesměs > 0 .

Je-li $a < b, c > d, \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ (věta o dělení nerovností).

Důkaz: Podle věty 2. 10. platí $\frac{1}{c} < \frac{1}{d}, \frac{1}{c} > 0$

Z toho podle věty 2. 9 $a \cdot \frac{1}{c} < b \cdot \frac{1}{d} \equiv \frac{a}{c} < \frac{b}{d}$

3. MOCNINY

Definice: Necht n je přirozené číslo větší než jedna, potom součin n činitelů, z nichž každý je roven číslu a nazýváme n -tá mocnina čísla a . Píšeme

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ činitelů}} = c,$$

kde a je základ (mocněnec), n — mocnitel (exponent), c — mocnina.

Věta 3. 1. Je-li $a > 0$, je $a^n > 0$ pro každé přirozené číslo n ;

Je-li $a = 0$, je $a^n = 0$ pro každé přirozené číslo n ;

Je-li $a < 0$, je $a^n > 0$ pro každé sudé číslo n ;

je $a^n < 0$ pro každé liché číslo n ;

$1^n = 1$ necht n je libovolné číslo.

Definice: Necht a je libovolné reálné číslo. Potom $a^0 = 1$.

Definice: Je-li $a \neq 0$ a je-li n přirozené číslo, je $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Věta 3. 2. Jsou-li r, p celá čísla a je-li $a \neq 0, b \neq 0$, platí

$$a^r \cdot a^p = a^{r+p}$$

$$a^r : a^p = a^{r-p}$$

$$(a^r)^p = a^{rp}$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r$$

$$a^r : b^r = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

Příklad 1. Podle definice $7^0 = 1; 5^{-2} = \frac{1}{25}$;

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = 2$$

Příklad 2. $2 a^3 b^4 c^{-1} \cdot 8 a^{-1} b^{-2} c = 16 a^2 b^2 = (4 ab)^2$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

Definice: Nezáporné číslo b , pro které platí, $b^n = a$, kde a je nezáporné číslo a n přirozené číslo, nazýváme n -tá odmocnina z čísla a . Píšeme

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{kde } a \text{ je odmocněnec (základ),}$$

$$n \quad \text{odmocnitel,}$$

$$b \quad \text{odmocnina.}$$

Pojem mocniny lze rozšířit i na případy, je-li exponent číslo racionální.

Definice: Je-li $a > 0$, m celé a n přirozené číslo, je $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Příklad 3. Podle definice je $3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$; $3^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3^3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$; $1^{\frac{7}{9}} = 1$;

Poznámka. Mocniny s racionálním exponentem jsou definovány jen pro kladné základy.

Věta 3. 2. Platí i pro mocniny s racionálními exponenty.

Příklad 4. a) $\sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} : 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} = 5^0 = 1$;

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt[3]{a \sqrt[3]{b}} \cdot \sqrt[3]{b \sqrt[3]{a}} &= \left(ab^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(ba^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{6}} = \\ &= a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}} \quad a > 0, b > 0; \end{aligned}$$

4. ABSOLUTNÍ HODNOTA

Absolutní hodnotu reálného čísla a značíme $|a|$

Definice. Je-li $a \geq 0$, je $|a| = a$,
je-li $a \leq 0$, je $|a| = -a$.*

Věta 4. 1. Necht a, b jsou reálná čísla. Potom platí

$$\begin{aligned} |a| &= |-a| \\ a &\leq |a| \rightarrow \\ |ab| &= |a| \cdot |b| \\ |a^n| &= |a|^n \quad \text{kde } n \text{ je přirozené číslo.} \\ \left|\frac{a}{b}\right| &= \frac{|a|}{|b|} \quad \text{pro } b \neq 0 \\ |a+b| &\leq |a| + |b| \quad (\text{trojúhelníková nerovnost}) \end{aligned}$$

Věta 4. 2. Ze dvou záporných čísel je větší to, které má menší absolutní hodnotu (Viz obr. 2.).

5. MNOHOČLENY

Definice. Mnohočlenem v proměnné x (racionální celistvou funkcí) nazýváme funkci**)

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou daná čísla (koeficienty mnohočlenu), x je proměnná. Výrazy $a_n x^n, \dots, a_2 x^2, a_1 x, a_0$ jsou členy mnohočlenu. $a_k x^k$ je člen k -tého stupně. Je-li $a_n \neq 0$, je mnohočlen n -tého stupně.

Poznámka. U mnohočlenů není často výslovně udáno, která písmena představují proměnné a která koeficienty. Tak např. dvojčlen $2a^3b + 3ab^2$ můžeme považovat za mnohočlen třetího (druhého) stupně v proměnné a (b).

*) Neostře nerovnosti platí proto, že $-0 = 0$.

**) Funkci definujeme tak, že ke každému prvku $x \in M$ přiřadíme podle určitého předpisu jedno a jen jedno číslo $y \in N$. Množinu M nazýváme definičním oborem funkce, x — proměnnou, y — funkční hodnotou. Píšeme $y = f(x)$.

S mnohočleny počítáme užitím zákona komutativního, asociativního a distributivního.

Příklad 1. a) $(2a + b - c) + (3a - 4b + 5c) = (2a + 3a) +$
 $+ (b - 4b) + (5c - c) = (2 + 3)a + (1 - 4)b +$
 $+ (5 - 1)c = 5a - 3b + 4c$

Užili jsme asociativního a komutativního zákona pro sčítání a zákona distributivního.

$$b) (3a^2 - 2a + 5) - (4a^2 + a - 7) = -a^2 - 3a + 12$$

Mnohočleny odčítáme tak, že přičítáme mnohočlen opačný.*)

$$c) (2a^2 + 3b - 1) \cdot 5ab = 10a^3b + 15ab^2 - 5ab$$

$$(2a^2 + 3b + 1) : 5ab = \frac{2a}{5b} + \frac{3}{5a} - \frac{1}{5ab}$$

Mnohočlen násobíme (dělíme) jednočlenem, násobíme-li (dělíme-li) jím každý člen mnohočlenu a součiny sečteme.

$$d) (2a + 3)(7b + 1) = 14ab + 21b + 2a + 3$$

Mnohočlen násobíme mnohočlenem, jestliže každý člen jednoho mnohočlenu násobíme každým členem druhého mnohočlenu a součiny sečteme.

e) Mnohočlen dělíme mnohočlenem, jestliže

1. Členy v obou mnohočlenech uspořádáme podle sestupných mocnin téhož základu.
2. První člen dělence dělíme prvním členem dělitele a dostaneme první člen podílu.
3. Násobíme dělitele prvním členem podílu, který dostaneme podle 2. a odečteme tento součin od dělitele. Zbytek dělíme obdobně a pokračujeme tak dlouho, až je zbytek nula, nebo mnohočlen nižšího stupně než dělitel.

Někdy je třeba daný mnohočlen rozložit v součin. K tomu užíváme jednak distributivního zákona (vytýkání před závorku), jednak vzorce, uvedené v další větě.

Věta 5. 1. Pro libovolná čísla a, b platí:

- a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- c) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$,
- d) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
- e) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,
- f) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$,
- g) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

6. LOGARITMY

6.1. Obecný logaritmus.

Definice: Logaritmus čísla $a > 0$, při základu $b > 0, b \neq 1$, je exponent, kterým musíme umocnit základ b , abychom dostali číslo a . Píšeme:

$$\log_b a = c \quad \text{kde } b \text{ je základ,}$$

$$a \quad \text{logaritmované číslo,}$$

$$c \quad \text{logaritmus.}$$

Věta 6. 1. 1. $\log_b 1 = 0$, neboť $b^0 = 1$
 $\log_b b = 1$

Poznámka: Číslo, jehož logaritmus hledáme, musí být kladné, ale logaritmus čísla může být kladný, záporný nebo nula.

*) Opačný mnohočlen k danému mnohočlenu dostaneme, změníme-li znaménka u všech jeho členů.

$$\text{Věta 6. 1. 2.} \quad \log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c \quad a, c > 0$$

$$\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c \quad a, c > 0$$

$$\log_b a^n = n \log_b a \quad a > 0, n \text{ je libovolné reálné číslo}$$

$$\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_b a \quad a > 0, n \text{ je přirozené číslo}$$

Příklad 1. Vypočtěme logaritmus čísel $\log_4 16$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$

$$\text{Řešení: } \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2; \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3^3} = 3$$

6.2. Dekadický logaritmus

Dosud jsme uvažovali logaritmus, jehož základem bylo libovolné kladné číslo. K numerickým výpočtům v praxi zpravidla užíváme logaritmu o základu 10, které nazýváme dekadickými logaritmy a značíme $\log a$, místo $\log_{10} a$.

Podle věty 6. 1. 2. platí, $\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$; $\log 10^2 = 2$; $\dots$ $\log 0,1 = -1$; $\dots$; $\log 10^{-5} = -5$; $\dots$

tedy obecně $\log 10^k = k$ pro každé číslo k

$$\text{Proto platí} \quad \log N = \log (10^k \cdot N_0) = \log 10^k + \log N_0 = k + \log N_0.$$

$$\text{Příklad 2:} \quad 34,2 = 10 \cdot 3,42 = \log 34,2 = 1 + \log 3,42$$

$$752,25 = 10^2 \cdot 7,5225 = \log 752,25 = 2 + \log 7,5225.$$

Každý dekadický logaritmus je součtem čísla k , které je celé a udává řád první platné číslice daného čísla. Nazýváme je charakteristika. Číslo $\log N_0$, pro něž platí $0 \leq \log N_0 < 1$, nazýváme mantisa.

Mantisy jsou uvedeny v tabulkách dekadických logaritmů.

6.3. Přirozený logaritmus

Základem přirozených logaritmů je iracionální číslo e^* .

Píšeme $\ln a = c$, což je ekvivalentní $e^c = a$.

Věta 6. 1. 2. platí i pro přirozené logaritmy.

$$\text{Věta 6. 3. 1. } \log a \cdot \ln 10 = \ln a^{**})$$

Příklad 3. Určeme x , platí-li $\ln x = 3,48$.

Řešení. Podle věty 6. 3. 1. můžeme psát

$$2,30259 \cdot \log x = 3,48 \Rightarrow \log x = 3,48 \cdot 0,434294 \equiv 1,51133.$$

Z tabulek dekadických logaritmů určíme $x = 32,458$.

*) $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$

**) $\ln 10 = 2,30259$

$$\frac{1}{\ln 10} = 0,434294$$

MATEMATICKÉ ZNAČKY

(Podle ČSN 01 1001, Matematické značky)

Značka	Výslovnost, význam a název
1. Označení pořadí	
...	a tak dále až; a tak dále až do nekonečna
$a_1, a_2, \dots, a_n$	a jedna, a dvě, a tak dále až a_n
2. Rovnost a nerovnost	
=	rovná se, (je) rovno; rovnítko
≡	(je) totožno, (je) identicky rovno
≠, ≠	nerovná se, není rovno, (je) různé od
≢	není totožno, není identicky rovno
≈	rovná se přibližně, (je) přibližně rovno
<	(je) menší než; značka nerovnosti (ostré)
>	(je) větší než; značka nerovnosti (ostré)
≡	(je) menší nebo rovno, (je) nejvýše rovno; značka nerovnosti (neostré)
≡	(je) větší nebo rovno, (je) alespoň (nejméně) rovno; značka nerovnosti (neostré)
≪	(je) mnohem (řádově) menší než
≫	(je) mnohem (řádově) větší než
3. Základní početní výkony	
+	plus, značka sčítání, znaménko kladného čísla
-	minus, bez; značka odčítání, znaménko záporného čísla, znaménko opačného čísla
·, ×	krát, násobeno; značka násobení
—, /, :	lomeno, děleno; značky —, / se nazývají zlomkové čáry
4. Geometrické značky	
, //	(je) rovnoběžno
≢	není rovnoběžno
↑↑	(je) rovnoběžno a souhlasného smyslu, (je) souhlasně rovnoběžno
↑↓	(je) rovnoběžno a opačného smyslu, (je) nesouhlasně rovnoběžno
⊥	(je) kolmé; značka kolmosti
$\overline{AB}$	úsečka s krajními body A, B
$\overline{AB}$	délka úsečky AB
$\widehat{AB}$	oblouk s krajními body A, B

Značka	Výslovnost, význam a název
5. Algebra a základy analýzy	
$ a $	absolutní hodnota reálného čísla a
$n!$	n faktoriál (n je celé nezáporné číslo)
$\binom{n}{k}$	n nad k ; binomický součinitel
Σ	součet, suma
Π	součin, produkt
$\sqrt[n]{a}$	n -tá odmocnina z nezáporného čísla a
$f(x)$	funkce proměnné x (argumentu x)
6. Limity	
$-\infty, +\infty, \infty$	minus nekonečno, plus nekonečno, nekonečno; označení pro nevlastní body
$\rightarrow$	blíží se (k), konverguje k
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	limita funkce $f(x)$ v bodě $x = a$
(a, b)	otevřený interval
$[a, b]$	uzavřený interval
$(a, b]$	zleva otevřený a zprava uzavřený interval
$[a, b)$	zleva uzavřený a zprava otevřený interval
7. Diferenciální počet	
$\Delta f(x)$	delta $f(x)$; přírůstek funkce $f(x)$
dx	diferenciál x
$f'(x), \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx} f(x), df/dx$	$d f$ podle $d x$, derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x
$f^{(n)}(x), \frac{d^n f}{dx^n}, \frac{d^n}{dx^n} f(x)$	n -tá derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x
$\varphi(t), \ddot{\varphi}(t)$	φ s tečkou, φ se dvěma tečkami; derivace podle času
$y', y'', \dots, y^{(n)}$	y s čárkou, y se dvěma čárkami, $\dots$, n -tá derivace y ; první, druhá, $\dots$, n -tá derivace
$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}$	df parciálně podle dx_i ,
$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n), \frac{\partial f}{\partial x_i}$	parciální derivace funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ podle proměnné x_i
$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$	dy podle dx , d dvě y podle dx na druhou, $\dots$, $d^n y$ podle dx na n -tou
f_x	f podle x ; parciální derivace funkce f podle x
f_{xy}	f podle xy , parciální derivace druhého řádu funkce f nejprve podle x , pak podle y
$df(x, y)$	totální diferenciál funkce $f(x, y)$

Značka	Výslovnost, význam a název
8. Integrální počet	
$\int f(x) dx$	neurčitý integrál funkce $f(x)$, funkce primitivní k funkci $f(x)$
$\int_a^b f(x) dx, \int_a^b f(x) dx$	určitý integrál funkce $f(x)$ od a do b
$[f(x)]_a^b, f(x) _a^b$	$f(b) - f(a)$
9. Exponenciální a logaritmické funkce	
e	základ přirozených logaritmů
$e^x, \exp x$	exponenciální funkce (při základu e)
$\log_a x$	logaritmus čísla x při základu a
$\lg x, \log x$	dekadický (Briggsův) logaritmus čísla x ;
$\ln x$	přirozený (Napierův) logaritmus čísla x
10. Goniometrické funkce	
$\sin x$	sinus x
$\cos x$	kosinus x
$\operatorname{tg} x$	tangens x
$\operatorname{cotg} x$	kotangens x
$\sec x$	sekans x
$\operatorname{cosec} x$	kosekans x
11. Determinanty a matice	
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$	determinant
$\det \mathbf{A}, \mathbf{A} , a_{ik} $	determinant čtvercové matice $\mathbf{A}$
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$ nebo $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$	obdélníková matice typu (m, n) (o m řádcích a n sloupcích)

Značka	Výslovnost, význam a název
12. Vektorový počet a $\mathbf{a} , a, \overrightarrow{AB}$ a° a.b a × b	
	vektor a velikost (modul, absolutní hodnota) vektoru a jednotkový vektor ve směru vektoru a a skalárně b; skalární součin vektorů b, b a vektorově b; vektorový součin vektorů a a b (v tomto pořadí)

Vybrané kapitoly elementární matematiky (pokračování)

7. ZÁKLADY ANALYTICKÉ GEOMETRIE V ROVINĚ

7.1. Analytická geometrie na přímce

Úkolem analytické geometrie je nahradit každý geometrický pojem určitým pojmem aritmetickým, abychom mohli geometrické úlohy řešit numericky.

Z názoru odvodíme dva základní geometrické pojmy. Předpokládáme, že je zvolena určitá délková jednotka např. 1 cm. Vzdálenost dvou bodů A, B označíme $\overline{AB}$ a zjistíme ji měřením, tj. srovnáním s délkovou jednotkou, takže vzdálenost bodů je vždy nepojmenované číslo.

Z názoru dále plyne: $\overline{AB} = 0$ pro splývající body, tj. pro $A = B$

$\overline{AB} > 0$ pro různé body, tj. pro $A \neq B$

$\overline{AB} = \overline{BA}$ pro libovolné body A, B .

Druhý pojem, který odvodíme rovněž z názoru, je orientace přímky. Je zřejmé, že každou přímku p může její bod X probíhat ve dvou, navzájem opačných smyslech. Zvolíme-li jeden z obou možných smyslů za kladný (druhý je záporný), říkáme, že jsme přímku orientovali a mluvíme o orientované přímce.

Zvolme na přímce p libovolný bod P , který nazveme počátek.*)

Je-li přímka p orientována, je-li určen počátek P , lze každému bodu $X \in p$ přiřadit jednoznačně reálné číslo podle vzorce

$$x = \pm \overline{XP} \quad (1)$$

$\text{sgn } x$ závisí od polohy bodu X na přímce p s ohledem na počátek P (polopřímka). (Je-li $X = P$, je $x = 0$ a na znaménku nezáleží). Číslo x přiřazené bodu X podle (1) se nazývá souřadnice bodu X .

Zvolíme-li naopak libovolné reálné číslo x , existuje právě jeden bod $X \in p$ takový, že zvolené číslo x je jeho souřadnicí.

Z předcházející úvahy plyne, že podle vzorce (1) lze vzájemně jednoznačně přiřadit body $X \in p$ a všechna reálná čísla x . Toto přiřazení se nazývá zavedení kartézské soustavy souřadnic na přímce p . Bod P je počátek soustavy souřadnic. Abychom vyznačili, že x je souřadnicí bodu X , píšeme $X = [x]$.

Věta 7.1.1. Necht jsou dány dva body $X = [x]$, $Y = [y]$ a přímka p . Vzdálenost $\overline{XY}$ bodů $X = [x]$, $Y = [y]$ přímky p vypočteme podle vzorce

$$\overline{XY} = |x - y|. \quad (2)$$

Vzorec (2) lze psát také ve tvaru $\overline{XY} = \sqrt{(x - y)^2}$ (2a)

7.2. Analytická geometrie v rovině

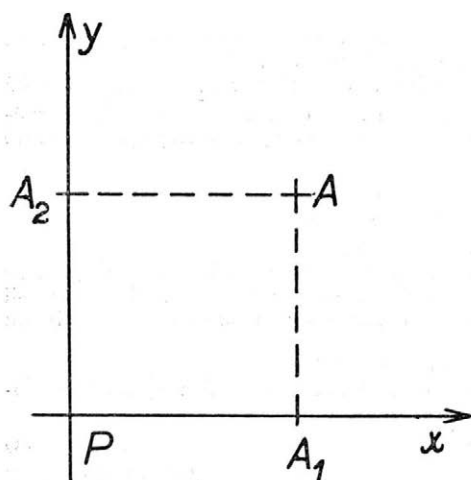
7.2.1. Kartézské souřadnice v rovině. Zvolme v rovině dvě vzájemně kolmé přímky x, y . Pro jednoduchost budeme v tomto odstavci předpokládat, že přímka x je vodorovná a přímka y svislá. Obě přímky se protínají v bodě, který nazveme P . Zavedme na přímce x soustavu souřadnic s počátkem P . Za kladnou polopřímku určenou bodem P obvykle bereme tu polopřímku, která je napravo od bodu P . Rovněž na přímce y zavedeme soustavu souřadnic s počátkem P . Za kladnou polopřímku označme tu, která směřuje od bodu P nahoru. Zvolme v rovině libovolný bod A . Bodem A vedme kolmici k přímce x a její patu**) označme A_1 . Bodem A vedme kolmici k přímce y a její patu označme A_2 . Bod A_1 leží na přímce, na níž je zavedena souřadnic a jeho souřadnicí na této přímce je rovna a_1 . Podobně bod A_2 má na přímce y souřadnicí a_2 . Čísla a_1, a_2 nazýváme kartézské souřadnice bodu A v rovině a píšeme $A = [a_1, a_2]$. Číslo a_1 se jmenuje první souřadnice nebo souřadnice x bodu A , číslo a_2 se jmenuje druhá souřadnice nebo souřadnice y bodu A .

*) Počátek rozděluje přímku p na dvě části, které nazýváme polopřímky. Je-li přímka p orientována, mluvíme o kladné a záporné polopřímce.

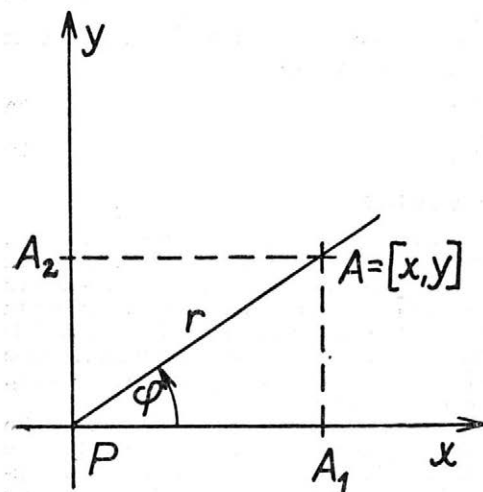
**) Pata je bod, ve kterém se protíná kolmice s přímkou na ní kolmou.

Pišeme tedy $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ nebo $A = [x_1, y_1]$, $B = [x_2, y_2]$. Tímto způsobem každému bodu A roviny přiřadíme jednoznačně uspořádanou dvojici souřadnic $[a_1, a_2]$. Obráceně: je-li dána uspořádaná dvojice čísel a_1, a_2 , existuje v rovině jediný bod A takový, že $A = [a_1, a_2]$.

Konstrukce takového bodu je zřejmá z obrázku 3.



3.



4.

Říkáme, že jsme v rovině zavedli *kartézskou soustavu souřadnic*, která je složena z orientované přímky x — říkáme jí *první osa souřadnic nebo osa x* a z orientované přímky y — říkáme jí *druhá osa souřadnic nebo osa y*.

Průsečík os značíme $P = [0, 0]$ a říkáme mu *počátek soustavy souřadnic*.

Věta 7. 2. 1. 1. Vzdálenost bodů $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ je

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}. \quad (3)$$

7. 2. 2. Přímka v rovině. Zvolme v rovině libovolnou přímku p a orientujme ji. Směrovým úhlem orientované přímky rozumíme orientovaný úhel, který svírá kladný směr*) osy x s kladným směrem přímky p . Z názoru je zřejmé, že dvě přímky x a y , $x \parallel y$, $x \uparrow \uparrow y$ mají stejný směrový úhel.

Poznámka. Budeme-li dále mluvit o orientované přímce $\{A, B\}$, potom kladná polopřímka je určena bodem A a obsahuje bod B .

Věta 7. 2. 2. 1. Je-li $A = [x, y] \neq P$ a je-li φ směrový úhel orientované přímky $\{P, A\}$ je

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi, \quad \text{kde } r = \overline{PA}.$$

Věta 7. 2. 2. 2. Jsou-li $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ dva různé body a je-li φ směrový úhel orientované přímky $\{A, B\}$, je

$$b_1 - a_1 = \overline{AB} \cdot \cos \varphi, \quad b_2 - a_2 = \overline{AB} \cdot \sin \varphi \quad (4)$$

Není-li $p \parallel y$, číslo $k = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ nazýváme *směrnici přímky p*.

Poznámka. Přímky $p \parallel y$ mají směrový úhel $\pm 90^\circ$ a hodnota tangenty není v těchto případech definována (svislé přímky nemají směrnici). Směrnice nezávisí na orientaci přímky.

Věta 7. 2. 2. 3. Jsou-li $A = [x_1, y_1]$, $B = [x_2, y_2]$ dva různé body, je směrnice přímky $\{A, B\}$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad (x_1 \neq x_2) \quad (5)$$

*) Kladným směrem otáčení rozumíme vždy směr proti směru otáčení hodinových ručiček.

Nechť $p \parallel y$ a necht' protíná osu x v bodě, jehož souřadnice je c . Pro každý bod $X \in p$ je $X = [c, y]$. Obráceně každý bod $Y = [x, y]$, pro který je $x = c$, je na přímce p .

Říkáme proto, že rovnice $x = c$ (6)

je rovnici přímky $p \parallel$ s osou y . Necht' nyní $p \nparallel y$.

Zvolme na přímce p bod $A = [a_1, a_2]$ a její směrnici označme k .

Nechť bod $X = [x, y]$, $X \in p$, $X \neq A$.

Pak podle (5) platí $k = \frac{y - a_2}{x - a_1}$ nebo

$$y = k(x - a_1) + a_2 \quad (7)$$

Rovnice (7) platí pro souřadnice x, y každého bodu přímky, včetně bodu A . Věta platí i obráceně.

Proto říkáme, že (7) je rovnici přímky, která prochází bodem $A = [a_1, a_2]$ a má směrnici k . Zvolíme-li bod A na ose y , tj. $a_1 = 0$, podle (7), dostaneme rovnici přímky, procházející bodem $[0, a_2]$ se směrnici k

$$y = kx + a_2 \quad (8)$$

Je-li ještě $a_2 = 0$ potom (8) přejde na tvar $y = kx$.

Z toho plyne, že všechny rovnice přímek procházejících počátkem, jsou ve tvaru (9).

Rovnice přímky $\{A, B\}$, kde

$$A = [v_1, y_1] \quad B = [v_2, y_2],$$

$$\text{je } (y - y_1) \cdot (x_2 - x_1) = (y_2 - y_1) \cdot (x - x_1). \quad (10)$$

Poznámka. Přímka rovnoběžná s osou x , procházející bodem $A = [a_1, a_2]$, se směrnici $k = 0$ má rovnici $y = a_2$ (11). Speciálně $x = 0$ je rovnici osy y a $y = 0$ je rovnici osy x .

Rovnice (6), (8), (11) jsou zvláštním případem lineárních rovnic.

Věta 7. 2. 2. 4. Souřadnice bodů libovolné přímky v rovině vyhovují určité lineární rovnici tvaru (10), kterou nazýváme rovnici přímky.

Věta 7. 2. 2. 5. Každá lineární rovnice (11) je rovnici určité přímky.

Věta 7. 2. 2. 6. Je-li přímka daná rovnicí

$$ax + by + c = 0, \quad (12)$$

pak přímka $\{P, N\}$ kde $N = [a, b]$ je k ní kolmá.

Rovnice přímky $\{P, N\}$ podle (10) je

$$(y - 0)(a - 0) = (b - 0)(x - 0)$$

to jest $bx - ay = 0$.

Věta 7. 2. 2. 7. Je-li přímka daná rovnicí

$$y = kx + q, \quad (13)$$

kde $k \neq 0$, má přímka na ni kolmá rovnici $y = k_1 x + q_1$,

$$\text{kde} \quad k_1 \cdot k = -1. \quad (14)$$

Věta 7. 2. 2. 8. Necht' je dána přímka p o rovnici

$$ax + by + c = 0 \text{ a bod } A = [x_1, y_1]; \quad (15)$$

potom vzdálenost v bodu A od přímky (15) je dána vzorcem

$$v = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (16)$$

$$\text{Věta 7. 2. 2. 9. Přímky} \quad ax + by + c = 0 \quad (17)$$

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad (18)$$

jsou rovnoběžné právě tehdy, je-li $ab_1 - a_1 b = 0$.

*) Vztah $ax + by + c = 0$, kde a, b, c jsou reálná čísla, a alespoň jedno z čísel a, b je různé od nuly, se nazývá lineární rovnice v, x, y .

Průsečík přímek (17) a (18) je bod $M = [m_1, m_2]$, který dostaneme řešením soustavy rovnic (17) a (18).

Směrovými čísly přímky $\{A, B\}$ nazýváme čísla $s_1 = b_1 - a_1$ a $s_2 = b_2 - a_2$.

Věta 7. 2. 10. Jsou-li s_1 a s_2 směrová čísla orientované přímky p a t_1, t_2 směrová čísla orientované přímky q a je-li φ jejich úhel, je

$$\cos \varphi = \frac{s_1 t_1 + s_2 t_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2} \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}} \quad (19)$$

Úhel φ , pro který je $\cos \varphi > 0$, nazýváme úhlem přímek p, q .

Věta 7. 2. 11. Jsou-li s_1, s_2 směrová čísla neorientované přímky p a t_1, t_2 směrová čísla neorientované přímky q , pro úhel φ těchto přímek platí

$$\cos \varphi = \frac{|s_1 t_1 + s_2 t_2|}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2} \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}} \quad (20)$$

7. 2. 3. Transformace souřadnic. Někdy je nutné zavést nějaký nový souřadný systém, který vznikne z původního posunutím nebo otočením. Symbolem $\{P; x, y\}$ budeme rozumět kartézský souřadný systém s první osou x a druhou osou y a počátkem P .

Věta 7. 2. 3. 1. Necht $\{P; x, y\}$ a $\{P'; x', y'\}$ jsou dva souřadné systémy. Systém $\{P'; x', y'\}$ vznikl posunutím systému $\{P; x, y\}$ do bodu P' tzn. $x \uparrow \uparrow x'$ a $y \uparrow \uparrow y'$, přitom bod P' má s ohledem na systém $\{P; x, y\}$ souřadnice $P' = [a_1, a_2]$; libovolný bod $X = [x, y]$ má v novém systému souřadnice x', y' , kde

$$x' = x - a_1, \quad y' = y - a_2.$$

Věta 7. 2. 3. 2. Vznikl-li systém $\{P'; x', y'\}$ ze systému $\{P; x, y\}$ otočením o úhel φ (tj. $P = P'$, úhel x a x' je φ), pak libovolný bod $X = [x, y]$ má v novém systému souřadnice x', y' , kde

$$\begin{aligned} x' &= y \cdot \sin \varphi + x \cdot \cos \varphi \\ y' &= y \cdot \cos \varphi - x \cdot \sin \varphi. \end{aligned}$$

7. 2. 4. Polární souřadnice. Někdy je výhodné zavést jinou souřadnou soustavu než je kartézská. V tomto odstavci zavedeme polární souřadnice. V rovině zvolíme polopřímku p určenou bodem P . Dále zvolíme v rovině (obr. 5) libovolný bod $X \neq P$. Na polopřímce $\{P, X\}$ zavedeme kartézskou souřadnou soustavu s počátkem P . Bod X má souřadnici $r = \overline{XP}$. Protože X leží vždy na kladné polopřímce je vždy $r \geq 0$. Poloha přímky $\{P, X\}$ je jednoznačně určena úhlem φ , tj. úhlem, který svírá polopřímka p s přímkou $\{P, X\}$. Úhel φ měříme v kladném smyslu a hodnoty mohou nabývat 0° až 360° .

Polohu bodu X udáme jednoznačně stanovením φ (na které polopřímce leží) a r (v jaké vzdálenosti od P). Čísla r a φ se nazývají polární souřadnice bodu X v rovině; r nazýváme

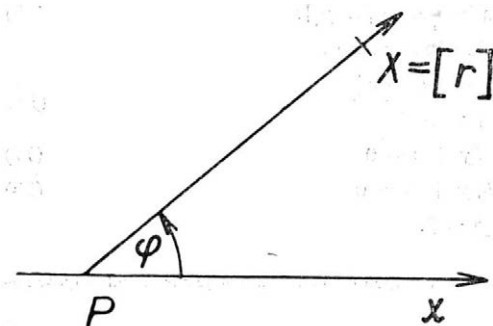
průvodič, φ říkáme polární úhel, píšeme $X = [r, \varphi]$. Bodu P říkáme pól, jeho průvodič $r = 0$, ale φ není určen. Polopřímka p se nazývá osa polárních souřadnic.

Přímka, procházející bodem P v polárních souřadnicích, má rovnici $\varphi = \text{konst.}$

ale $r = \text{konst.}$ je rovnicí kružnice se středem v P .

Zavedeme-li polární souřadnice tak, jak je naznačeno na obr. 6., potom vztah mezi kartézskými a polárními souřadnicemi je dán vzorci $x = r \cdot \cos \varphi$
 $y = r \cdot \sin \varphi$

Naopak polární souřadnice z kartézských vypočteme podle vzorců



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Věta 7. 2. 4. 1. Necht $X = [r_1, \varphi_1]$ a $Y = [r_2, \varphi_2]$ jsou dva body roviny. Jejich vzdálenost je dána vzorcem:

$$\overline{XY} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

7.3. Pojem křivky v rovině

Definice: Křivkou v rovině nazýváme množinu bodů $[x, y]$, jejíž souřadnice vyhovují rovnici $f(x, y) = 0$.

Důležitou vlastností křivek je souměrnost podle počátku a podle os x, y .

Definice: Křivka k je souměrná podle počátku, platí-li pro každý bod $X = [x, y] \in k$, že $X' = [-x, -y] \in k$. Křivka k je souměrná podle osy x , platí-li pro každý bod $X = [x, y] \in k$, že $X'' = [x, -y] \in k$.

Křivka k je souměrná podle osy y , platí-li pro každý bod $X = [x, y] \in k$, že $X''' = [-x, y] \in k$.

Uvedeme nejdůležitější křivky.

7. 3. 1. Kružnice. **Definice:** Necht je dán bod $S = [m, n]$ a reálné číslo $r > 0$, potom kružnici nazýváme množinu bodů, jejichž vzdálenost od bodu S je rovna číslu r a značíme $\{S, r\}$. Kde S — je střed kružnice, r — poloměr. Je-li $X \in \{S, r\}$ a platí-li $X = [x, y]$, potom souřadnice bodu X vyhovují rovnici

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2 \quad (21)$$

Rovnici (21) nazýváme rovnicí kružnice $\{S, r\}$.

Věta 7. 3. 1. 1. Rovnice $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ je rovnicí kružnice, se středem $S = [-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}]$ a

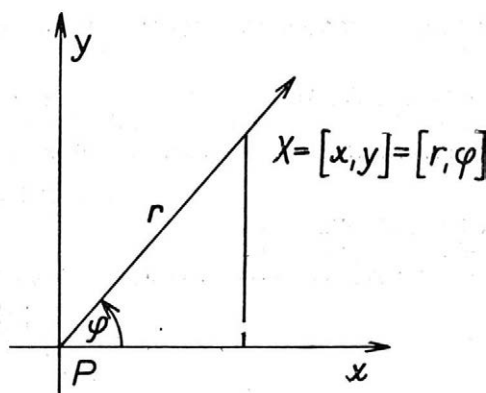
poloměrem $r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$, platí-li $a^2 + b^2 - 4c > 0$.

Libovolnou kružnici $\{S, r\}$, kde $S = [m, n]$, jejíž střed zvolíme za počátek nové soustavy souřadnic (obr. 8) vyjádříme ve tvaru $x'^2 + y'^2 = r^2$.

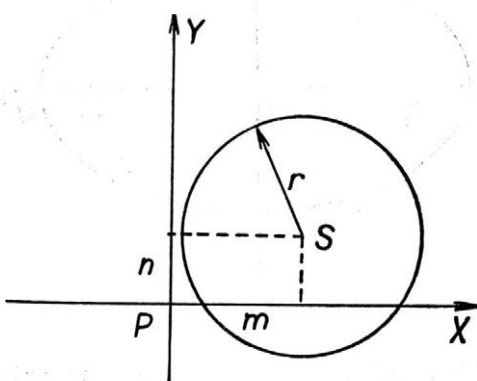
Kružnice o středu v počátku P je sdružená podle počátku i podle os x, y .

7. 3. 2. 1. Vzájemná poloha přímky a kružnice.

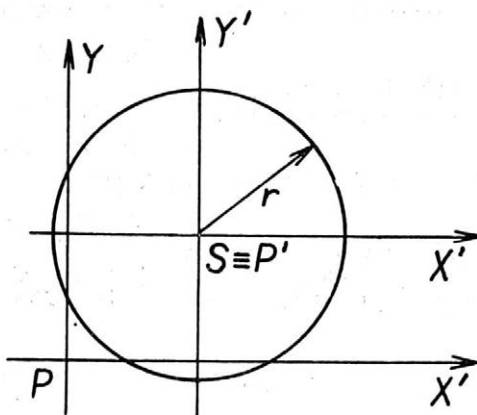
Definice: Necht je dána kružnice $\{S, r\}$



6.



7.



8.

a přímka p . Přímku p nazýváme nesečnou, má-li od středu S vzdálenost větší než r ; tečnou, je-li tato vzdálenost rovna r a sečnou, je-li tato vzdálenost menší než r .

Věta 7. 3. 2. 1. Necht' je dána kružnice $\{0, r\}$ a přímka p o rovnici

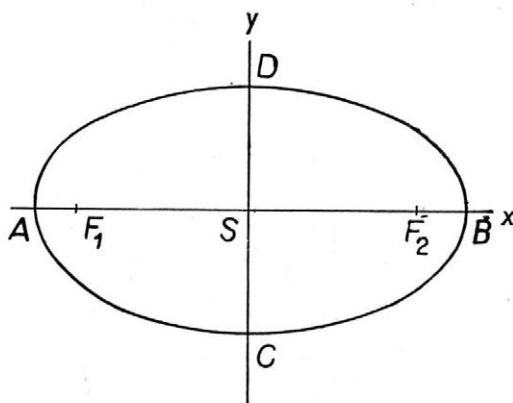
$$ax + by + c = 0$$

Je-li $r < u$ je přímka p nesečna,

je-li $r = u$ je přímka p tečna,

je-li $r > u$ je přímka p sečna, kde u je vzdálenost přímky p od počátku P

$$u = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



7. 3. 3. *Elipsa. Definice:* Necht' a, b jsou kladná reálná čísla; potom množinu bodů $x = [x, y]$, jejíž souřadnice vyhovují rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (22)$$

nazýváme elipsou.

Poznámka. Je-li $a = b$, přejde elipsa v kružnici se středem $S = [0; 0]$.

Počátek S nazýváme středem elipsy a osu x hlavní a y vedlejší osou elipsy (je-li $a > b$; pro $a < b$ je x osou vedlejší a y osou hlavní).

Průsečíky s hlavní osou nazýváme hlavními vrcholy, průsečíky s vedlejší osou, vedlejšími vrcholy elipsy.

Necht' dále $a > b$, potom souřadnice hlavních vrcholů jsou $[-a, 0]$, $[a, 0]$, vedlejších vrcholů $[0, -b]$, $[0, b]$.

9.

Číslo a nazýváme hlavní poloosou, číslo b vedlejší poloosou.

Ohnisky elipsy nazýváme body na hlavní ose, vzdálené od počátku $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Jsou to body $[-e, 0]$, $[e, 0]$.

Ohniska značíme písmeny F_1, F_2 a e nazýváme výstředností elipsy.

Věta 7. 3. 3. 1. Necht' bod X leží na elipse (22), potom platí

$$\overline{F_1 X} + \overline{F_2 X} = 2a \quad (23)$$

Věta platí i obráceně.

Všechny body elipsy leží v pásu mezi přímkami

$$x = a \quad x = -a,$$

které jsou rovnoběžné s osou y a přímkami

$$y = b \quad y = -b,$$

které jsou rovnoběžné s osou x .

Z uvedeného je zřejmé, že pro $|x| > a$ neexistuje y , aby bod $[x, y]$ byl bodem elipsy; pro $|x| < a$ existují y_1 , a y_2 tak, že body $X_1 = [x_1, y_1]$, $X_2 = [x_2, y_2]$ jsou body elipsy.

$$y_1 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad y_2 = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Vnitřní body úsečky $X_1 X_2$ nazýváme vnitřními body elipsy.

Množinu všech vnitřních bodů elipsy nazýváme vnitřkem elipsy. Body, které neleží ani ve vnitřku elipsy ani nejsou body elipsy, nazýváme body vně elipsy a platí pro ně nerovnost

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$$

Přímky $\parallel$ s osou y

$$x = \frac{a^2}{e} \qquad x = -\frac{a^2}{e}$$

nazýváme řídící přímky elipsy.

Poměr $\frac{e}{a}$ nazýváme numerickou výstředností elipsy a značíme jej ϵ .

Věta 7. 3. 3. 2. Leží-li bod X na elipse (22), platí: poměr vzdáleností bodu od ohniska a od odpovídající řídící přímky je roven ϵ . Platí i obrácená věta.

Vzájemná poloha elipsy a přímky je definována obdobně jako v odst. 7. 3. 2., neboť kružnice je speciálním případem elipsy.

7. 3. 4. Hyperbola. Definice: Necht a, b jsou kladná reálná čísla. Množinu bodů $X = [x, y]$, jejíž souřadnice vyhovují rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (24)$$

nazýváme hyperbolou.

Hyperbola je souměrná podle obou os x, y i podle počátku. Počátek nazýváme středem hyperboly; osu x hlavní osou, osu y vedlejší osou hyperboly; číslo a hlavní poloosou, číslo b vedlejší poloosou.

Hyperbola protíná hlavní osu ve dvou bodech $[-a, 0], [a, 0]$, kterým říkáme vrcholy hyperboly. Vedlejší osu hyperbola reálně neprotíná.

Hyperbolu, danou rovnici

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nazýváme vzájemně sdruženou hyperbolou s hyperbolou danou rovnicí (24). Hyperbola se skládá ze dvou částí, které se reálně neprotínají a nazýváme je větve hyperboly.

Vnitřek hyperboly definujeme podobně jako u elipsy.

Přímky

$$y = \frac{b}{a} x \qquad y = -\frac{b}{a} x$$

nazýváme asymptotami hyperboly (i hyperboly sdružené).

Věta 7. 3. 4. 1. Součin vzdáleností bodů hyperboly (i hyperboly sdružené) od obou asymptot je konstantní a je

$$u = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Platí i obrácená věta.

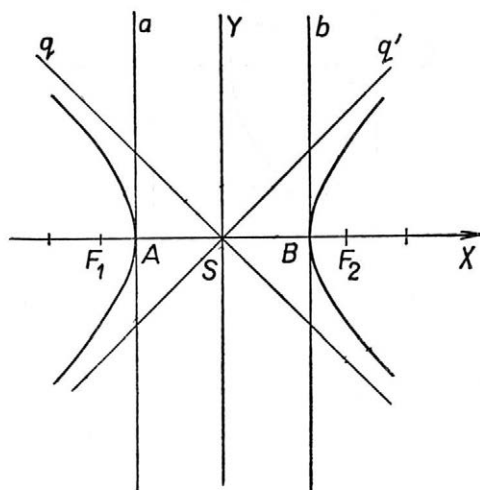
Ohnisky hyperboly nazýváme body $F_1 = [-e, 0], F_2 = [e, 0]$ kde

$$e = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Věta 7. 3. 4. 1. Pro body x ležící na hyperbole dané rovnicí (24) platí

$$|\overline{XF_1} - \overline{XF_2}| = 2a \quad (25)$$

a naopak, bod x , pro který vyhovuje (25), je bodem hyperboly.



10.

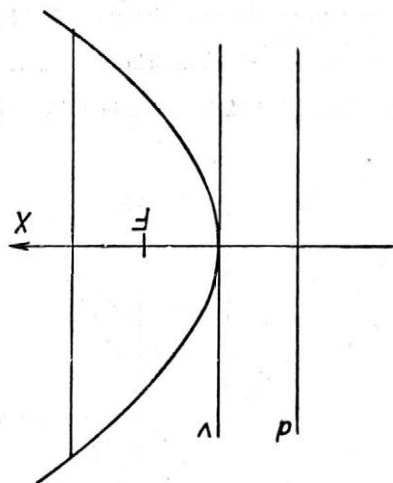
Poznámka: Je-li $a = b$, nazýváme hyperbolu rovnoosou hyperbolou; její asymptoty jsou vzájemně kolmé.

7. 3. 5. Parabola. Definice: Mějme přímku d a bod F .

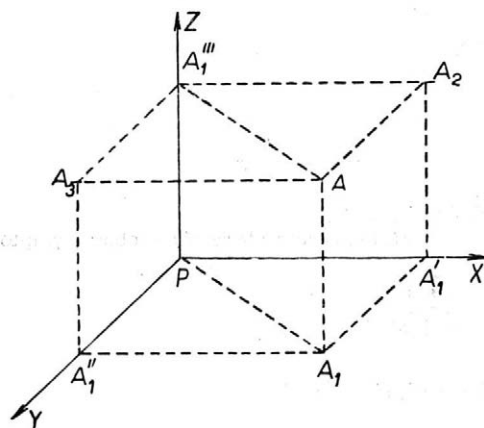
Množinu všech bodů, jejichž vzdálenost od přímky d je rovna jejich vzdálenosti od bodu F , nazýváme parabolou.

Bod F je ohnisko a přímka d řídící přímka paraboly.

Zvolme přímku d rovnoběžnou s osou y a bod F na ose x napravo od přímky d , potom parabola je dána výrazem $y^2 = 2px$ (26) kde p je parametr paraboly a osa x osou paraboly (parabola je podle ní sdružená). Průsečík paraboly s její osou nazýváme vrcholem paraboly.



11.



12.

8. ANALYTICKÁ GEOMETRIE V PROSTORU

8.1. Kartézské souřadnice v prostoru

Jsou dány tři navzájem kolmé orientované přímky (osy x, y, z), procházející jediným bodem P (počátek soustavy) a je dána délková jednotka.

Každému bodu A prostoru přiřadíme uspořádanou trojici reálných čísel $[x_1, y_1, z_1]$ kde x_1, y_1, z_1 jsou souřadnice kolmých průmětů do os x, y, z , které mají kartézský souřadný systém. Tímto předpisem je každému bodu prostoru přiřazena trojice reálných čísel a každé trojici reálných čísel odpovídá bod v prostoru.

Z obrázku je zřejmé, že každé dvě souřadné osy tvoří souřadnicovou rovinu; značíme je xy, yz, xz . Při určování souřadnic postupujeme takto: z bodu A spustíme kolmici na rovinu xy , přičemž dostaneme bod A_1 , který promítneme od osy x a y , a dostaneme body A_1', A_3'' ; potom platí

$$\begin{aligned} x_1 &= \overline{A_1'P} \\ y_1 &= \overline{A_3''P} \\ z_1 &= \overline{A_1'''P} \end{aligned}$$

Zvolíme-li jiný postup, buď pomocí bodu A_2 nebo A_1 , dostaneme stejný výsledek.

8.2. Vzdálenost dvou bodů v prostoru

Věta 8. 2. 1. Necht $A_1 = [x_1, y_1, z_1]$; $A_2 = [x_2, y_2, z_2]$ jsou dva body. Jejich vzdálenost je dána výrazem

$$\overline{A_1 A_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Vzdálenost bodu $A = [x_1, y_1, z_1]$ od počátku $P = [0, 0, 0]$ je tedy

$$\overline{PA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Věta 8. 2. 2. Necht $A_1 = [x_1, y_1, z_1]$, $A_2 = [x_2, y_2, z_2]$, $A_3 = [x_3, y_3, z_3]$ jsou tři body v prostoru takové, že $A_2 \neq A_1$, $A_3 \neq A_1$ a necht φ je úhel orientovaných přímek $\{A_1 A_2\}$, $\{A_1 A_3\}$. Potom

$$\overline{A_1 A_2} \cdot \overline{A_1 A_3} \cdot \cos \varphi = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) + (z_2 - z_1)(z_3 - z_1).$$

8.3. Přímka v prostoru

Definice. Necht p je orientovaná přímka v prostoru. Potom směrovými úhly přímky p rozumíme úhly, které svírá tato přímka se souřadnými osami. Značíme je α, β, γ . Směrovými kosiny nazýváme $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$.

Z uvedené definice plyne, že směrové úhly nezávisí na volbě počátku, protože $\parallel$ přímky mají stejné úhly.

Věta 8. 3. 1. Necht α, β, γ , jsou směrové úhly přímky p . Potom pro směrové kosiny platí $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Věta 8. 3. 2. Jsou-li $A_1 = [x_1, y_1, z_1]$, $A_2 = [x_2, y_2, z_2]$ dva různé body a jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, směrové úhly orientované přímky $\{A_1 A_2\}$, platí

$$x_1 - x_2 = \overline{A_1 A_2} \cos \alpha_1$$

$$y_1 - y_2 = \overline{A_1 A_2} \cos \alpha_2$$

$$z_1 - z_2 = \overline{A_1 A_2} \cos \alpha_3$$

Věta 8. 3. 3. Necht p je orientovaná přímka se směrovými kosiny a_1, a_2, a_3 a necht q je orientovaná přímka se směrovými kosiny b_1, b_2, b_3 ; potom pro úhel φ orientovaných přímek p, q platí

$$\cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

8.4. Kolmost přímek v prostoru

Věta 8. 4. 1. Necht platí předpoklady věty 8. 3. 3.; potom orientované přímky p, q jsou kolmé právě tehdy, když

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

Z praktických důvodů zavádíme směrová čísla.

Necht p je orientovaná přímka se směrovými úhly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, potom směrovými čísly nazýváme trojici a_1, a_2, a_3 , kde $a_i = c \cdot \cos \alpha_i$; pro $i = 1, 2, 3$; c je kladné reálné číslo.

Jsou-li a_1, a_2, a_3 tři čísla, z nichž alespoň jedno je od nuly různé, pak existují orientované přímky se směrovými čísly a_1, a_2, a_3 a pro jejich směrové kosiny platí

$$\cos \alpha_i = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \text{ pro } i = 1, 2, 3.$$

Přímka opačně orientovaná má směrové kosiny a čísla původní přímky s opačným znaménkem.

Neznáme-li orientaci přímky, užíváme směrová čísla neorientované přímky definovaná takto: Necht $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jsou směrové úhly orientované přímky p ; potom směrovými čísly neorientované přímky p nazýváme trojici čísel a_1, a_2, a_3 , definovanou vztahy $a_i = k \cdot \cos \alpha_i$ pro $i = 1, 2, 3$, kde k je libovolné reálné číslo od nuly různé.

Věta 8. 4. 2. Necht p je přímka se směrovými čísly a_1, a_2, a_3 a necht q je přímka se směrovými čísly b_1, b_2, b_3 .

Přímky p, q jsou vzájemně kolmé, platí-li

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

Věta 8. 4. 3. Necht p je orientovaná přímka se směrovými čísly a_1, a_2, a_3 a necht q je orientovaná přímka se směrovými čísly b_1, b_2, b_3 a necht jejich úhel je φ . Potom platí

$$\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (27)$$

Vynecháme-li ve větě 8. 4. 3. předpoklad orientovanosti přímek, bereme ve výrazu (27) čísel v absolutní hodnotě.

Věta 8. 4. 4. Jsou-li $A_1 = [x_1, y_1, z_1]$, $A_2 = [x_2, y_2, z_2]$ dva různé body, potom směrová čísla přímky $\{A_1, A_2\}$ jsou

$$x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2.$$

8.5. Rovina v prostoru

Rovinu v prostoru dostaneme jako množinu všech přímek kolmých na danou přímku p . Obecně, jsou-li udána reálná čísla a, b, c , z nichž alespoň jedno je nenulové, a která jsou směrovými čísly přímky p , potom směrová čísla a_1, b_1, c_1 všech přímek kolmých na přímku p musí vyhovovat rovnici

$$a a_1 + b b_1 + c c_1 = 0.$$

V případě, že přímka p prochází počátkem P , je směrové číslo rovno souřadnici bodu X , kterým přímka p prochází.

Věta 8. 5. 1. Rovina, procházející počátkem, je množina bodů $A = [x_1, y_1, z_1]$, jejichž souřadnice vyhovují rovnici

$$a x_1 + b y_1 + c z_1 = 0.$$

Věta 8. 5. 2. Necht rovnice $a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$ a $a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$ jsou rovnicemi roviny ρ' , potom existuje číslo $k \neq 0$ tak, že

$$a_2 = k a_1, b_2 = k b_1, c_2 = k c_1.$$

Věta 8. 5. 3. Rovnice

$$a x + b y + c z + d = 0 \quad (28)$$

definuje obecnou rovinu ρ v prostoru.

Věta 8. 5. 4. Rovina ρ' daná rovnicí

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

je rovnoběžná s rovinou ρ danou (28) právě tehdy, existuje-li takové $k \neq 0$, že platí

$$a_1 = k a, b_1 = k b, c_1 = k c \quad (29)$$

Rovina ρ je totožná s rovinou ρ' , platí-li (29) a $d_1 = k d$.

Věta 8. 5. 5. Necht je dána rovina ρ ; bod $A = [x_1, y_1, z_1]$. Pro vzdálenost u bodu A od roviny ρ platí vztah

$$u = \frac{(a x_1 + b y_1 + c z_1 + d)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Literatura

1. Bydžovský B.: Úvod do analytické geometrie, 3. přepracované vyd. ČSAV Praha, 1956.
2. Čech E.: Základy analytické geometrie, díly I. (1951) a II. (1952) Přírodovědecké vydavatelství Praha.
3. Vojtěch J.: Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických části I. (ČSAV 1959) a II. (JČMF 1945) Praha.

II. Základy lineární algebry

1. DETERMINANTY

Definice: Determinantem n -tého stupně nazýváme číslo A a píšeme

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kde a_{ij} jsou prvky determinantu A . Determinant n -tého stupně A má n^2 prvků. Prvky a_{ii} leží na hlavní diagonále determinantu a nazýváme je hlavními prvky.

Věta 1.1.

- Determinant se nezmění, zaměníme-li řádky za sloupce.
- Determinant se nezmění, přičteme-li k jednomu jeho řádku (sloupci) lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců).
- Determinant je roven nule, je-li jeden z jeho řádků (sloupců) lineární kombinací ostatních řádků (sloupců).
- Determinant změní znaménko, vyměníme-li navzájem dva řádky (sloupce).

Definice: Determinant S_{ij} , který vznikne z determinantu A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce, se nazývá subdeterminant $(n-1)$ -ního stupně determinantu A příslušný k prvku a_{ij} .

Doplňkem A_{ij} prvku a_{ij} v determinantu A nazýváme subdeterminant S_{ij} opatřený znaménkem $(-1)^{i+j}$. Zřejmě platí

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} S_{ij}.$$

Věta 1.2. (Rozvoj determinantu)

Determinant je roven součtu součinů, které vzniknou, násobíme-li každý prvek řádku (nebo sloupce) příslušným doplňkem.

Říkáme, že rozvíjíme determinant podle prvků zvoleného řádku (sloupce). Tento rozvoj je tím výhodnější, čím více nulových prvků obsahuje řádek, podle jejichž prvků determinant rozvíjíme. Zpravidla upravíme determinant tak, aby v jedné jeho řadě zůstal jen jediný nenulový prvek.

Obecně píšeme

$$A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$$

nebo

$$A = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}$$

Věta 1.3. Jsou-li prvky některého sloupce (řádku) v determinantu A součty o dvou členech, je tento determinant roven součtu dvou determinantů, jejichž sloupce (řádky) na témže místě stojí obsahují první, resp. druhé členy těchto součtů; ostatní sloupce (řádky) se pak shodují se sloupci (řádky) daného determinantu.

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_2 + b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n + b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Obdobně platí věta pro ostatní sloupce (řádky) a pro vícečlenné součty.

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

nebo

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Věta 1.4. (Násobení determinantu číslem)

Determinant násobíme číslem c , násobíme-li tímto číslem všechny prvky některého řádku nebo sloupce.

$$\begin{vmatrix} c \cdot a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c \cdot a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c \cdot a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Věta 1.5. (Součin determinantů)

Součin dvou determinantů n -tého stupně je determinant téhož stupně, jehož prvky v jednotlivých řádcích (řádcích nebo sloupcích) jsou součty součinů z prvků téže řady jednoho a z prvků všech řad druhého determinantu.

Příklad:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu

Hodnotu determinantu druhého stupně určíme podle pravidla

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Hodnotu determinantu třetího stupně určíme podle Sarrusova pravidla

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Výpočet determinantu n -tého stupně pro $n \geq 3$ převedeme podle věty 1.2 na výpočet determinantu $(n-1)$ -ního stupně. Před výpočtem je výhodné determinant upravit podle věty 1.1.b).

Příklad: Stanovte hodnotu determinantu

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 6 & 28 & 33 & 8 \\ 10 & 40 & 54 & 13 \\ 8 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix}$$

Řešení: Odečteme dvojnásobek prvního řádku od druhého:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 10 & 40 & 54 & 13 \\ 8 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix}$$

Připočteme dvojnásobek třetího sloupce ke druhému:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 47 & 17 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & 148 & 54 & 13 \\ 8 & 129 & 46 & 11 \end{vmatrix}$$

Rozvineme determinant podle prvků druhého řádku:

$$A = -0 \begin{vmatrix} 47 & 17 & 4 \\ 148 & 54 & 13 \\ 129 & 46 & 11 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 17 & 4 \\ 10 & 54 & 13 \\ 8 & 46 & 11 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 47 & 4 \\ 10 & 148 & 13 \\ 8 & 129 & 11 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 47 & 17 \\ 10 & 148 & 54 \\ 8 & 129 & 46 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 47 & 4 \\ 10 & 148 & 13 \\ 8 & 129 & 11 \end{vmatrix}$$

Tento determinant vyčíslíme buď podle Sarrusova pravidla:

$$A = (3 \cdot 148 \cdot 11) + (10 \cdot 129 \cdot 4) + (8 \cdot 47 \cdot 13) - (4 \cdot 148 \cdot 8) - (13 \cdot 129 \cdot 3) - (11 \cdot 47 \cdot 10) = -5,$$

nebo odečteme 11-násobek třetího sloupce od druhého

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 10 & 5 & 13 \\ 8 & 8 & 11 \end{vmatrix}$$

a druhý sloupec od prvního

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 13 \\ 0 & 8 & 11 \end{vmatrix}$$

a pak teprve rozvineme podle prvků prvního sloupce

$$A = -5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} = -5 \cdot (33 - 32) = -5.$$

2. VEKTORY

Definice: Uspořádanou n -tici prvků, které považujeme za čísla reálná (komplexní), tj.

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

označujeme symbolem

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Takto uspořádanou n -tici reálných (komplexních) čísel nazýváme v algebře vektorem (komplexním) n -dimensionálního vektorového prostoru R_n .

Čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou tzv. souřadnice vektoru. Jsou-li všechna čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ reálná, pak vektor $\mathbf{x}$ je reálný vektor.

Je-li alespoň jedno z čísel komplexní, říkáme, že vektor $\mathbf{x}$ je komplexní vektor. Vlastnosti uváděné pro komplexní vektory platí pro reálné vektory a naopak.

Věta 2.1. Dva vektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ se sobě rovnají právě tehdy, když $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$.

Jsou-li všechna x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) rovna nule, je $\mathbf{x}$ nulový vektor a píšeme $\mathbf{x} = 0$.

Součet dvou vektorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ je vektor $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$.

Součin vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ s číslem c je vektor $c \cdot \mathbf{x} = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n)$.

Pro $c = -1$ dostaneme

$$-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n),$$

vektor opačný k vektoru $\mathbf{x}$.

Příklad: $\mathbf{x} = (2, 0, -1)$, $\mathbf{y} = (1, 2, 3)$
 Součet $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (3, 2, 2)$
 Součin $3 \cdot \mathbf{x} = (6, 0, 3)$

Věta 2.2. Pro sčítání vektorů a pro sčítání vektorů v souvislosti s násobením vektoru číslem platí zákony:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{y} + \mathbf{x} && (\text{zákon komutativní}) \\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} &= \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) && (\text{zákon asociativní}) \\ k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= k\mathbf{x} + k\mathbf{y} && (\text{zákon distributivní}) \\ (k + l)\mathbf{x} &= k\mathbf{x} + l\mathbf{x} \end{aligned}$$

Definice: Skalární součin dvou vektorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ je definován

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Tento součin je komutativní, tzn. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.

Definice: Vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ jsou lineárně závislé, jestliže existují taková čísla $c_1, c_2, \dots, c_m$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, že platí

$$c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_m \mathbf{x}_m = 0$$

Jestliže vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ nejsou lineárně závislé, pak říkáme, že jsou lineárně nezávislé, to znamená, že $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$.

Definice: Vektor $\mathbf{x}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$, existují-li taková čísla $c_1, c_2, \dots, c_m$, že

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_m \mathbf{x}_m.$$

Z uvedených definic vyplývá, že vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ jsou lineárně závislé, je-li alespoň jeden vektor lineární kombinací ostatních.

Příklad: Vektory $\mathbf{x}_1 = (3, 1, 2)$, $\mathbf{x}_2 = (-1, 0, 2)$, $\mathbf{x}_3 = (7, 2, 2)$ jsou lineárně závislé, neboť $2\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$.

Z této rovnice plyne, že

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_2 &= 2 \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_3 &= 2 \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

Definice: Prostor R se nazývá n -dimensionálním (R_n), jestliže v něm existuje n lineárně nezávislých vektorů, přičemž každých $(n + 1)$ vektorů z R_n tvoří soustavu vektorů lineárně závislých.

Definice: Soustavu n lineárně nezávislých vektorů nazýváme bází n -dimensionálního prostoru R_n .

Bázi můžeme tedy tvořit soustava n -lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{z}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), které nazýváme základní vektory. Pak libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ lze vyjádřit

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{z}_1 + x_2 \mathbf{z}_2 + \dots + x_n \mathbf{z}_n.$$

Čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ v bázi $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n$.

Zbývá ještě objasnit, jak poznáme, zda skupina vektorů $\mathbf{z}_j$ jsou vektory lineárně nezávislé. Označíme-li

$$\mathbf{z}_i = (z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{in}),$$

musí podle uvedené definice pro lineární závislost vektorů $\mathbf{z}_i$ existovat taková čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$, že platí

$$\begin{array}{l} c_1 z_{11} + c_2 z_{21} + \dots + c_n z_{n1} = 0 \\ c_1 z_{12} + c_2 z_{22} + \dots + c_n z_{n2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ c_1 z_{1n} + c_2 z_{2n} + \dots + c_n z_{nn} = 0 \end{array}$$

V teorii sústav lineárnych algebraických rovníc sa dokazuje, že túto podmínku lze splniť
tedy a ibatedy, je-li

$$\begin{vmatrix} z_{11}, & z_{21}, & \dots, & z_{n1} \\ z_{12}, & z_{22}, & \dots, & z_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{1n}, & z_{2n}, & \dots, & z_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

tzn., aby vektory soustavy byly lineárně závislé, musí determinant soustavy být roven nule.

Příklad: Vektor $\mathbf{x} = (1, 2)$ se vztahuje k bázi (I) tvořené jednotlivými vektory $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$. Máme určit souřadnice téhož vektoru v jiné bázi (II), která je tvořena vektory $\mathbf{z}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{z}_2 = (1, -1)$ a dokázat, že tyto dva vektory jsou lineárně nezávislé.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

tudíž vektory $\mathbf{z}_1$ a $\mathbf{z}_2$ jsou lineárně nezávislé.

Podobně jako platí

$$\mathbf{x} = x_1^I \mathbf{e}_1 + x_2^I \mathbf{e}_2,$$

kde $x_1^I = 1$ a $x_2^I = 2$, musí platit

$$\mathbf{x} = x_1^{\text{II}} \mathbf{z}_1 + x_2^{\text{II}} \mathbf{z}_2,$$

kde x_1^{II} a x_2^{II} jsou neznámá čísla.

Protože

$$x_1^{\text{II}}(1, 1) + x_2^{\text{II}}(1, -1) = (1, 2),$$

dostaneme pro x_i^{II} soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1^{\text{II}} + x_2^{\text{II}} &= 1 \\ x_1^{\text{II}} - x_2^{\text{II}} &= 2 \end{aligned}$$

Odtud

$$x_1^{\text{II}} = \frac{3}{2}$$

$$x_2^{\text{II}} = -\frac{1}{2}$$

V bázi, která je tvořena vektory $\mathbf{z}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{z}_2 = (1, -1)$, je vektor $\mathbf{x}$ vyjádřen

$$\mathbf{x} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right).$$

3. MATICE

Definice: Množina $m \cdot n$ prvků a_{ij} , kde $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, napsaných v m -řádcích a v n -sloupcích tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se nazývá matice typu (m, n) .

Je-li $m \neq n$, pak se matice nazývá obdélníková, je-li $m = n$ jde o matici čtvercovou řádu n (nikoliv typu n, n). Prvky $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ matice tvoří hlavní diagonálu, prvky $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots$ tvoří vedlejší diagonálu.

Poznámka: Čtvercová matice řádu n po formální stránce připomíná determinant n -tého stupně. Rozdíl mezi determinantem a maticí je podstatný, protože matici nepřipisujeme nikdy žádnou hodnotu, takže zůstává jen symbolem bez číselné hodnoty. V úlohách, v nichž se vyskytují matice, podrobují se prvky matice výkonům, jež se vztahují na všechny tyto prvky; tedy výkon se vztahuje na matici jako celek.

Prvky matice mohou být jakákoli čísla, např. reálná nebo komplexní, vektory nebo opět matice. Pojem prvků, řádků, sloupců definujeme stejně jako u determinantu.

Matice se označuje tak, že pravoúhlý systém prvků uzavíráme mezi dvojité čáry nebo do hranatých, popř. kulatých závorek. Matici označujeme jediným tučným písmenem. Matice lze napsat také jedním prvkem s obecnými indexy; tento prvek musí být uzavřen do příslušných závorek. Například

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = (a_{ij}) = ||a_{ij}|| \quad \begin{matrix} \text{pro } i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

Definice: Hodností matice nazýváme hodnotu soustavy vektorů tvořených řádkami (řádky nebo sloupce) této matice. Matice $\mathbf{A}$ má hodnotu h , existuje-li mezi řádkami h lineárně nezávislých řad a je-li každá další řada matice jejich lineární kombinací.

Věta 3.1. Matice typu (m, n) má vždy hodnotu $h \leq \min(m, n)$ [h je nejvýše rovno menšímu z čísel (m, n)].

Z definice hodnoty matice plyne, že matice $\mathbf{A}$ má hodnotu $h = 0$ právě tehdy, jsou-li všechny její prvky rovny nule.

Příklad: Matice $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ má hodnotu 2,

neboť vektory $\mathbf{a} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{b} = (-1, -2, 4)$, $\mathbf{c} = (0, 1, -3)$ jsou lineárně závislé:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c} = 0.$$

Vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ jsou lineárně nezávislé.

Definice: Dvě matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou si rovny, tj. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, jsou-li téhož typu (m, n) a je-li každý prvek a_{ij} matice $\mathbf{A}$ roven stejnohlému prvku b_{ij} matice $\mathbf{B}$, tj. platí-li

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \begin{matrix} \text{pro } i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n. \end{matrix}$$

Příklad:

$$\text{Rovnost} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}$$

platí jen tehdy, platí-li

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_{11}, a_{12} = b_{12}, a_{13} = b_{13} \\ a_{21} &= b_{21}, a_{22} = b_{22}, a_{23} = b_{23} \end{aligned}$$

a naopak.

Definice: Matice

$$T \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

kteřá vznikne výměnou řádků za sloupce, se nazývá transponovaná matice k matici $\mathbf{A}$ a je typu (n, m) .

Věta 3.2. Hodnost transponované matice $T \mathbf{A}$ se rovná hodnosti matice $\mathbf{A}$.

Poznámka: Podle věty 3.2. můžeme dělat úpravy nejen u řádků, ale i u sloupců, aniž se tím změní hodnost matice.

Definice: Dvě matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, mající tutéž hodnost, nazýváme ekvivalentní a zapisujeme

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}.$$

Věta 3.3. Hodnost matice se nezmění,

- změníme-li libovolně pořadí řad (řádků nebo sloupců),
- znásobíme-li všechny prvky libovolné řady číslem $c \neq 0$,
- vynecháme-li řadu, jejíž prvky jsou vesměs nuly,
- přičteme-li k libovolné řadě jakoukoli lineární kombinaci ostatních řad,
- připojíme-li nebo vynecháme-li řadu, která je lineární kombinací ostatních řad matice.

Věta 3.4. Matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

kde prvky hlavní diagonály se vesměs nerovnají nule a kde prvky pod hlavní diagonálou jsou nuly, má hodnost m .

Příklad: Určeme hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

tak, že použijeme zmíněných úprav:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 6 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \sim \\ &\sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Podle věty 3.4. je zřejmé, že $h = 3$.

Definice: Je-li hodnost čtvercové matice rovna jejímu řádu ($h = n$), nazývá se maticí regulární. Je-li $h < n$, nazývá se maticí singulární.

Z definice vyplývá, že čtvercová matice je regulární, je-li její determinant různý od nuly, a je singulární, je-li její determinant roven nule.

Definice: Matice s jediným sloupcem je matice typu $(n, 1)$ a nazývá se sloupcový vektor. Píšeme ji

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Matice s jednou řádkou je matice typu $(1, n)$ a nazývá se řádkový vektor. Píšeme ji

$$\mathbf{b} = || b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n ||$$

Sloupcové vektory často píšeme ve tvaru transponované řádkové matice

$$\mathbf{a} = T || a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n ||$$

Definice: Matice, jejíž všechny prvky jsou nulové, se nazývá nulová matice a značíme ji $\mathbf{0}$.

Definice: Diagonální matice je čtvercová matice řádu n nebo obdélníková matice typu (m, n) , v níž prvních h ($h < m, n$) hlavních prvků a_{ii} ($i = 1, 2, \dots, h$) jsou čísla různá od nuly a všechny ostatní prvky jsou rovny nule.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definice: Násobná matice řádu n je diagonální čtvercová matice, jejíž všechny hlavní prvky jsou rovny témuž číslu.

Jednotková matice řádu n je násobná matice, jejíž všechny hlavní prvky jsou rovny jedné. Označujeme ji $\mathbf{E}$.

Poznámka: Jednotková matice má v algebře matic podobnou úlohu jako číslo 1 v algebře čísel. Její determinant má hodnotu 1.

Příklad: Jednotková matice 4. řádu:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definice: Je-li ve čtvercové matici $a_{ij} = a_{ji}$, nazýváme ji souměrnou maticí (symetrickou). Souměrná matice je čtvercová matice, která je rovna matici k ní transponované ($a_{ij} = a_{ji}$). Matice pseudosouměrná je čtvercová matice, jejíž prvky se liší od prvků matice k ní transponované znaménkem, tj. $a_{ij} = -a_{ji}$ ($i \neq j$). Jsou-li hlavní prvky nulové, nazývá se maticí polosouměrnou.

Poznámka: a) U matice souměrné jsou hlavní prvky libovolné, kdežto prvky ležící souměrně podle hlavní diagonály jsou stejné.

b) U matice pseudosouměrné se liší prvky ležící souměrně podle hlavní diagonály jen znaménkem a alespoň jeden prvek ve hlavní diagonále není roven nule.

c) Matice polosouměrná je čtvercová matice, jejíž prvky se liší od prvků matice k ní transponované jen znaménkem; pro její prvky platí $a_{ij} = -a_{ji}$ pro každé i, j .

Příklad: Matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

je souměrná řádu 3,

matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

je pseudosouměrná řádu 3,

matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

je polosouměrná řádu 3.

Definice: Čtvercovou matici nazýváme trojúhelníkovou, jsou-li všechny prvky po jedné straně hlavní diagonály nulové.

Příklad: Matice

nebo matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

jsou trojúhelníkové.

3.1. Základní algebraické početní výkony s maticemi

Zákony maticové algebry se v některých podrobnostech podstatně liší od zákonů algebry čísel. Zejména je třeba věnovat pozornost násobení matic a jejich inverzi.

Čísla reálná nebo komplexní nazýváme v maticovém počtu skaláry.

Definice: Součinem matice **A** se skalárem *k* nazýváme matici *k.A*, která vznikne z matice **A** tak, že všechny prvky matice **A** vynásobíme skalárem *k*.

$$k \cdot \mathbf{A} = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Tato definice definuje součin i dělení skalárem $K = \frac{1}{k}$, ($k \neq 0$).

Poznámka: 1. Je-li $k = 0$, je $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot 0 = \mathbf{0}$

2. Je-li $k = 1$, je $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot 1 = \mathbf{A}$

3. Je-li $k = -1$, je $(-1) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot (-1) = -\mathbf{A}$

Definice: Součtem (rozdílem) **A** + **B**, (**A** - **B**) dvou matic **A**, **B** téhož typu (*m*, *n*) nazýváme matici **C** typu (*m*, *n*), jejíž prvky jsou rovny součtům (rozdílům) stejnolehlých prvků obou matic.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{vmatrix}$$

Věta 3.1.1. Pro násobení matice skalárem a pro sčítání matic platí zákony:

- a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (zákon komutativní)
 b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ (zákon asociativní)
 c) $(k_1 + k_2) \mathbf{A} = k_1 \mathbf{A} + k_2 \mathbf{A}$ (zákon distributivní)
 $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k \mathbf{A} + k \mathbf{B}$

Příklad: Součet dvou matic typu (2, 3) je

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix}$$

Definice: Necht jsou dány matice $\mathbf{A}$ (m, n) a $\mathbf{B}$ (n, p), potom součin matic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ zleva a $\mathbf{B}$ zprava, nazýváme maticí $\mathbf{C}$ (m, p):

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{vmatrix},$$

jejíž prvky $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ pro $\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, p \end{matrix}$

se rovnají součtu součinů stejnohlých prvků i -té řádky matice $\mathbf{A}$ a j -tého sloupce matice $\mathbf{B}$.
Poznámka: Matice můžeme násobit jen tehdy, je-li počet sloupců jedné matice roven počtu řádků druhé matice.

Součiny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ i $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ sedají současně provést jen u matic typu (p, n) a (n, p). Je-li tato podmínka splněna, jsou oba součiny čtvercovými maticemi. Jeden součin je typu (n, n), druhý je typu (p, p). Nejsou navzájem rovné, pokud není $p = n$.

Avšak při $p = n$ nemusí ještě platit

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A},$$

neboť násobení matic není obecně komutativní (platí-li $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, nazýváme obě matice navzájem zaměnitelnými).

Věta 3.1.2. Pro násobení matic $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ platí

1. zákon asociativní: $\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$

2. zákon distributivní: $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$

za předpokladu, že matice jsou předepsaného typu.

Příklad: Mějme matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Vypočteme a) $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
 b) $\mathbf{D} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 13 & 5 \end{vmatrix}$$

3.2. Elementární úpravy matic

Elementárními úpravami matic rozumíme:

1. násobení určitého řádku (sloupce) dané matice číslem různým od nuly,
 2. vzájemnou záměnu řádků (sloupců),
 3. přičtení násobku určitého řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci) matice.
- Elementární úpravy matice děláme např. při převádění dané matice na diagonální.

3.3. Inverzní matice

Definice: Inverzní maticí k libovolné matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) nazýváme matici $\mathbf{A}^{-1}$ typu (n, m) , pro niž platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E},$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice řádu m .

Matice $\mathbf{A}^{-1}$ je k dané matici $\mathbf{A}$ inverzní zprava. Obdobně

$$^{-1}\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E};$$

pak říkáme, že matice $^{-1}\mathbf{A}$ je maticí inverzní zleva k dané matici $\mathbf{A}$.

Platí-li $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = ^{-1}\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$, nazýváme matici $\mathbf{A}^{-1}$ i $^{-1}\mathbf{A}$ inverzní maticí k $\mathbf{A}$ a označujeme ji jen $\mathbf{A}^{-1}$.

Věta 3.3.1. Nutnou a postačující podmínkou, aby k matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) existovala matice inverzní buď zleva, nebo zprava, je, aby hodnota h matice $\mathbf{A}$ byla právě rovna menšímu z čísel m, n

$$h_{\mathbf{A}} = \min(m, n).$$

Je-li splněna věta 3.3.1. a platí-li

1. $m < n$, existuje nekonečně mnoho matic $\mathbf{A}^{-1}$ typu (n, m) inverzních zprava. Matice inverzní zleva neexistují.
2. $m > n$, existuje nekonečně mnoho matic $^{-1}\mathbf{A}$ typu (n, m) inverzních zleva. Matice inverzní zprava neexistují.
3. $m = n$, existuje právě jediná inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ řádu n , která splňuje

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Poznámka: K singulární matici ($h < n$) inverzní matice neexistuje.

3.3.1. Určení čtvercové inverzní matice

K regulární matici

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

řádu n existuje jediná inverzní matice, regulární, daná vztahem

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}$$

kde $\mathbf{A}$ je determinant matice $\mathbf{A}$,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \text{ je adjungovaná matice k matici } \mathbf{A}.$$

Prvky adjungované matice $\tilde{a}_{ji} = A_{ji}$ jsou doplňky prvků a_{ji} v determinantu matice $\mathbf{A}$.

Příklad. Vypočteme inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$

vypočteme nejprve

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Výpočet inverzní matice právě uvedeným způsobem je velmi obtížný, zejména u matice vyššího řádu. V takových případech používáme numerické metody. Jednou z výhodných metod k určení inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ k regulární matici $\mathbf{A}$, vyhovující podmínce

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E},$$

je tzv. Gaussova eliminační metoda.

Princípem této metody je postupné vyloučení všech prvků matice $\mathbf{A}$ mimo prvky ležící na hlavní diagonále. Vedle matice $\mathbf{A}$ napíšeme matici jednotkovou a v matici $\mathbf{A}$ činíme určité řádkové úpravy tak, že ji změníme v jednotkovou matici. Obdobně upravíme i jednotkovou matici, již těmito úpravami změníme v inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$.

Příklad: Vypočteme inverzní matici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	dvojnásobek 1. řádku odečteme od 3. řádku
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	3. řádek přičteme k 1. řádku
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	dvojnásobek 3. řádku přičteme k 2. řádku
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	2. řádek dělíme 2

$$\begin{array}{l}
 \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right\| \quad \left\| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -4 & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \right\| \quad \begin{array}{l} \text{2. řádek přičteme} \\ \text{ke 3. řádku} \end{array} \\
 \\
 \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \quad \left\| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -\frac{1}{4} & -1 \end{array} \right\| \quad \begin{array}{l} \text{3. řádek dělíme } (-2) \end{array} \\
 \\
 \mathbf{A}^{-1} = \left\| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -\frac{1}{4} & -1 \end{array} \right\|
 \end{array}$$

Přesvědčíme se, že platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

3.3.2. Matice inverzní zleva nebo zprava k maticím obdélníkovým

Věta 3.3.2. 1. a) K obdélníkové matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) a hodnoti m ($m < n$) existuje vždy nekonečně mnoho matic $\mathbf{A}^{-1}$ typu (n, m) inverzních zprava k matici $\mathbf{A}$.

Jednou z těchto nekonečně mnoha matic je

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{T}\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}\mathbf{A})^{-1},$$

kde $\mathbf{T}\mathbf{A}$ je matice transponovaná k $\mathbf{A}$. Pak $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

b) K obdélníkové matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) a hodnoti n ($m > n$) existuje vždy nekonečně mnoho matic ${}^{-1}\mathbf{A}$ typu (n, m) inverzních zleva k matici $\mathbf{A}$.

Jednou z takových matic je

$${}^{-1}\mathbf{A} = (\mathbf{T}\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{T}\mathbf{A},$$

pak

$${}^{-1}\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

Příklad: Invertujeme matici

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right\|$$

Řešení: $m = 2, n = 4, h = 2$; existují matice inverzní zprava

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 9 & 10 \\ 10 & 14 \end{array} \right\|$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{26} \left\| \begin{array}{cc} 14 & -10 \\ -10 & 9 \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{T}\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}) = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{array} \right\| \cdot \frac{1}{26} \left\| \begin{array}{cc} 14 & -10 \\ -10 & 9 \end{array} \right\| = \frac{1}{26} \left\| \begin{array}{cc} 14 & -10 \\ 8 & -2 \\ -10 & 9 \\ -2 & 7 \end{array} \right\|$$

Je-li výsledek správný, pak musí platit

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{26} \begin{vmatrix} 14 & -10 \\ 8 & -2 \\ -10 & 9 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{26} \begin{vmatrix} 26 & 0 \\ 0 & 26 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{E} \end{aligned}$$

3.3.3. Rozdělené matice

Uvažujeme matici $\mathbf{A}$ řádu 4,

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Prvky matice $\mathbf{A}$ rozdělíme do menších skupin tak, aby prvky matice byly opět matice, tzv. submatice původní matice.

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix}$$

kde:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Početní výkony s rozdělenými maticemi definujeme formálně právě tak jako u matic s prvky.

Zvláštní pozornost, pro ilustraci, věnujeme výpočtu čtvercové inverzní matice pomocí submatic.

Matice $\mathbf{A}$ je regulární řádu 4 rozdělená ve 4 submatice, které jsou také regulární. Pak existuje $\mathbf{A}^{-1}$ rozdělená právě tak jako $\mathbf{A}$, splňující

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{vmatrix}$$

Submatice $\mathbf{C}$ vypočteme podle vztahů

$$\mathbf{C}_{11} = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{A}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{21})^{-1}$$

$$\mathbf{C}_{22} = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{12})^{-1}$$

$$\mathbf{C}_{12} = -\mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{C}_{22}$$

$$\mathbf{C}_{21} = -\mathbf{A}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{C}_{11}$$

Tento způsob inverze matice je výhodný, je-li snadný výpočet matic $\mathbf{A}_{11}^{-1}$, $\mathbf{A}_{22}^{-1}$ nebo jsou-li $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{21}$ v matici $\mathbf{A}$ nulové matice.

4. ROVNICE

Slova „rovnice“ používáme ve dvojím významu. Vztah $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, který vyjadřuje rovnost pravé a levé strany, platí pro každé a, b . Tento vztah se nazývá rovnici identickou.

Naopak $x^2 + 3x + 4 = 0$ je vztahem, který platí jen pro určité hodnoty x ; nazýváme jej rovnicí určovací.

Určovací rovnice dělíme na dvě skupiny:

Je-li neznámá spjata s konstantami jen pomocí čtyř elementárních početních úkonů (sčítání, odečítání, násobení, dělení), tj. je-li rovnice tvaru

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \dots (1) \quad a_0 \neq 0,$$

kde:

a_i jsou daná čísla (levá strana je mnohočlenem n -tého stupně),

pak mluvíme o algebraické rovnici:

není-li levá strana tohoto tvaru, tzn. že např. vystupuje neznámá jako argument funkci $\sin x$, $\lg x$, atd., pak mluvíme o transcendentní rovnici*).

Číslo α , které dosadíme do levé strany rovnice (1), tuto rovnici anuluje a nazývá se kořenem (nebo také nulovým bodem) dané rovnice. V tomto odstavci se budeme zabývat algebraickými rovnicemi. Budeme hledat jejich kořeny. Tomuto procesu říkáme řešení rovníc.

4.1. Maticové rovnice — řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Při řešení soustavy lineárních algebraických rovnic uplatňujeme inverzi a násobení matic. Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých píšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \tag{1}$$

kde:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou neznámé,
 $\left. \begin{array}{l} a_{11}, \dots, a_{mn} \\ b_1, \dots, b_m \end{array} \right\}$ jsou daná čísla (a_{ij} nazýváme koeficienty,
 b_i absolutní členy).

Maticí soustavy nazýváme matici

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Rozšířenou maticí soustavy nazýváme matici

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{vmatrix}$$

*) Rovnice transcendentní jsou např. rovnice trigonometrické, logaritmické, exponenciální aj. Tyto rovnice se liší od rovnic algebraických např. tím, že mohou mít nekonečně mnoho kořenů nebo žádný kořen.

Věta 4.1.1. Frobeniova věta: Soustava lineárních rovnic je řešitelná právě tehdy, je-li hodnost matice soustavy rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.

Poznámka: Jsou-li b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) všem rovna nule, nazývá se soustava lineárních rovnic soustavou lineárních homogenních rovnic a má vždy nulové řešení. Je-li alespoň jedno b_i různé od nuly, nazývá se soustava lineárních rovnic soustavou lineárních nehomogenních rovnic.

Věta 4.1.2. Nutné a postačující podmínky pro řešitelnost soustavy lineárních rovnic lze vyjádřit vztahy mezi hodnotami matice soustavy a počtem všech neznámých. Platí:

- je-li $h_s = n$, má soustava lineárních homogenních rovnic jediné nulové řešení; soustava lineárních nehomogenních rovnic má jediné nenulové řešení;
- je-li $h_s < n$, má soustava lineárních homogenních i nehomogenních rovnic řešení nekonečně mnoho.

Soustavu lineárních rovnic lze maticemi zapsat

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Při řešení m rovnic o n neznámých postupujeme tak, že

- určíme hodnoty matice soustavy a matice rozšířené,
- za předpokladu, že obě hodnoty jsou sobě rovny, vynecháme $(h - m)$ lineárně závislých rovnic a převedeme $(n - h)$ neznámých na pravé strany rovnic,
- řešíme pak h rovnic o h neznámých podle vztahu

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

Příklad: Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Řešení podle uvedeného postupu:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad h_{\mathbf{A}} = 2$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad h_{\mathbf{R}} = 2$$

$h_{\mathbf{A}} = h_{\mathbf{R}} < n \Rightarrow$ ex. nekonečně mnoho řešení soustavy.

Dostaneme redukovanou soustavu

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= -1 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1 + x_3 \end{aligned}$$

maticově

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + x_3 \\ 1 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Věta 4.2.1. Nutná a postačující podmínka, aby soustava (1) měla jediné řešení, je, aby determinant soustavy $A \neq 0$. Každá neznámá se rovná zlomku, v jehož čitateli je determinant, který vznikne z determinantu soustavy, když v něm nahradíme koeficienty u počítané neznámé absolutními členy z pravé strany a ve jmenovateli je determinant soustavy A .

Příklad: Určeme neznámou x_2 ze soustavy rovnic

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 - x_3 = 5$$

$$x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 2$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -13 \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$x_2 = \frac{A_2}{A} = -\frac{6}{13}.$$

Literatura

1. Bydžovský B.: Úvod do theorie determinantů a matic a jich užití. JČMF, Praha 1947. —
2. Schmidt Mayer J.: Maticový počet a jeho použití v elektrotechnice. SNTL, Praha 1954. —
3. Frazer, Duncan, Collar: Základy maticového počtu, jeho aplikace v dynamice a v diferenciálních rovnicích. SNTL, Praha 1958.

III. Základní pojmy matematické analýzy v ekonomické interpretaci

1. FUNKCE JEDNÉ NEZÁVISLE PROMĚNNÉ

1.1. Pojem funkce

V matematické analýze pracujeme s proměnnými číselnými veličinami. Není důležité vědět, jak se určitá veličina mění sama o sobě, ale jak se mění s ohledem na ostatní veličiny. Matematická analýza je, stručně řečeno, studium závislosti mezi proměnnými veličinami. K popisu takových závislostí užíváme pojmu funkce. Zápis funkce je abstraktní a obecný, ale v podstatě velmi jednoduchý. Než ho zavedeme, ukážeme několik příkladů funkcí, které jsou používány jak ve vědecké práci, tak v každodenním životě. Jestliže plyn je stlačován při konstantní teplotě, jeho objem se mění, je „funkcí“ tlaku. Množství peněz zaplacené za poštovní balíček závisí na jeho váze, je „funkcí“ jeho váhy. Množství určité komodity na trhu nějakým způsobem souvisí s její tržní cenou, tj. závisí a je „funkcí“ ceny.

Podstata funkce tkví v tom, že můžeme popsat vztah mezi hodnotami dvou proměnných veličin, obecněji závislost jedné proměnné na ostatních.

Definice: Necht D je libovolná množina reálných čísel. Jestliže každému $x \in D$ přiřadíme reálné číslo y , říkáme, že y je funkce x a značíme $y = f(x)$, kde x je nezávisle proměnná, y je závisle proměnná, množina D je definiční obor funkce $f(x)$.

Příklad 1. $y = 2x$, definiční obor jsou reálná čísla. Snadno nahlédneme, že každé hodnotě x (reálnému číslu) odpovídá právě jedna hodnota y .

Příklad 2. $y = \frac{3}{x}$, definiční obor jsou reálná čísla mimo nuly.

Příklad 3. $y = \sqrt{16 - x^2}$, definiční obor jsou ty hodnoty x , které vyhovují nerovnosti $-4 \leq x \leq 4$

Příklad 4. Přiřazení podle definice může být zapsáno také ve tvaru

$0 \leq x \leq 3$	$3 \leq x \leq 4$	$4 \leq x \leq 5$
$y = 6$	$y = 3 + x$	$y = 7$

Definičním oborem jsou všechna čísla, pro která platí

$$0 \leq x \leq 5.$$

Příklad 5. Funkce může být určena také takto: y je nula, když x je liché; y je jedna, když x je sudé. Definičním oborem jsou přirozená čísla.

Definice: Skutečnost, že M je množina všech x , která mají vlastnost V , budeme značit symbolem

$$M = \{x \text{ má vlastnost } V\}.$$

Příklad 6. Množinu E_1 všech reálných čísel značíme takto

$$E_1 = \{x \text{ je reálné}\}.$$

Definice: Interval je množina reálných čísel, která obsahuje všechna reálná čísla vyhovující určité nerovnosti.

Speciálně: Necht $a \in E_1, b \in E_1, a < b$, potom množinu $\{x \in E_1; a < x < b\}$ nazýváme otevřeným intervalem a značíme (a, b) . Množinu $\{x \in E_1; a \leq x \leq b\}$ nazýváme uzavřeným intervalem a značíme $[a, b]$. Zde a nazýváme počátečním bodem, b koncovým bodem intervalu.

Poznámka. Výše uvedené intervaly jsou omezené; pro neomezené intervaly užíváme symbolů:

$$\varepsilon [x \in E_1; x > a] = (a, \infty)$$

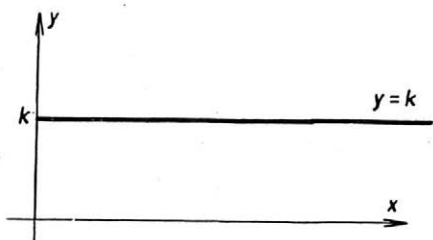
$$\varepsilon [x \in E_1; x \geq a] = [a, \infty)$$

Je-li $a = 0$, pak v prvním případě jde o množinu kladných čísel, ve druhém o množinu nezáporných čísel.

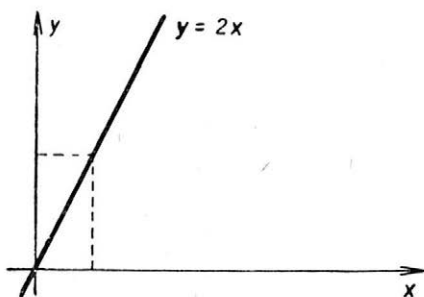
K přehlednějšímu vyjádření funkční závislosti užíváme grafického znázornění.

Definice: Grafickým znázorněním (grafem) funkce $f(x)$ v definičním oboru D je množina bodů v rovině, které mají tvar $[x, f(x)]$ pro $x \in D$.

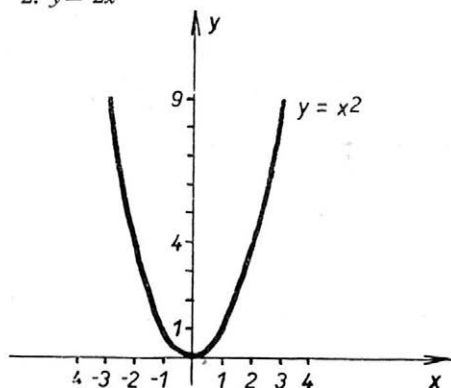
1.2. Grafy elementárních funkcí



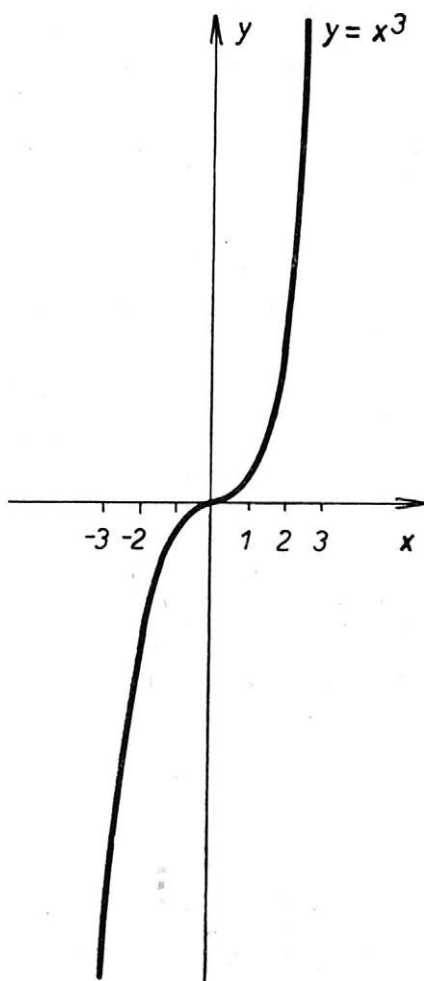
1. $y = k$ (konstanta)



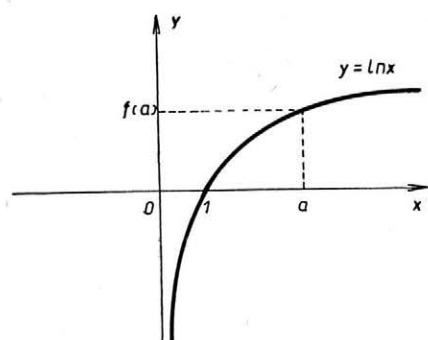
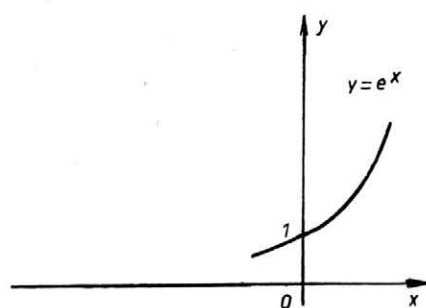
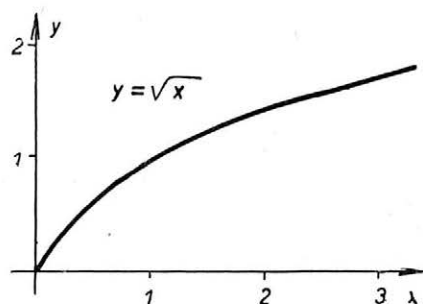
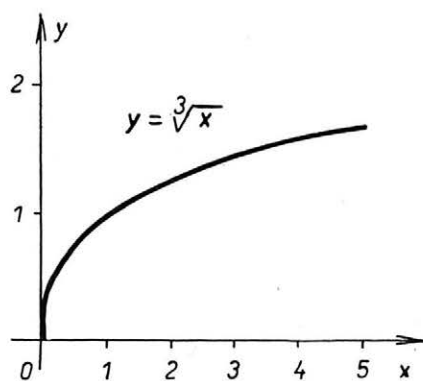
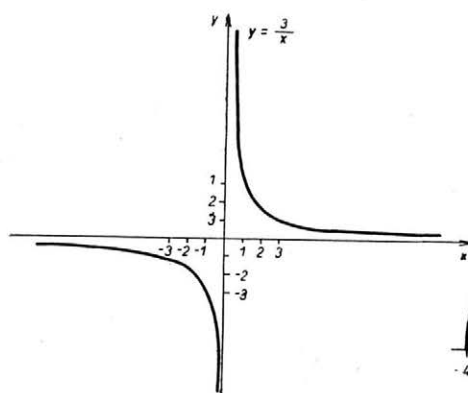
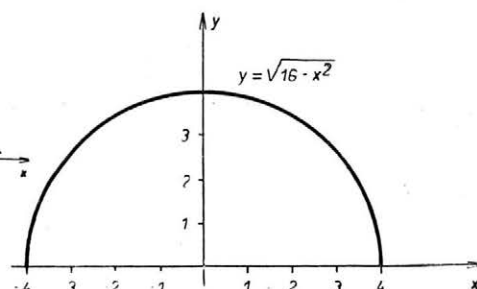
2. $y = 2x$

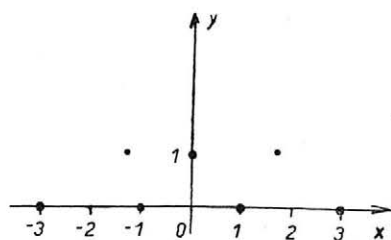
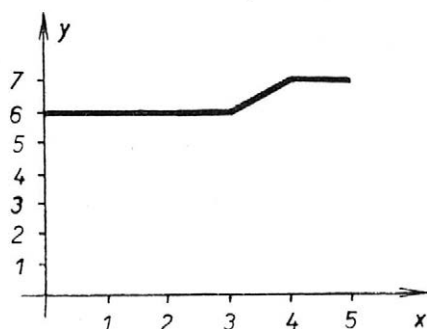


3. $y = x^2$



4. $y = x^3$


 5. $y = \ln x$

 6. $y = e^x$

 7. $y = \sqrt{x}$

 8. $y = \sqrt[3]{x}$

 9. $y = \frac{3}{x}$

 10. $y = \sqrt{16 - x^2} \quad -4 \leq x \leq 4$



11. funkce daná tabulkou v příkladě 4.

12. $y = 0$ x — liché
 $y = 1$ x — sudé

1.3. Základní typy funkcí

1. Jestliže funkce $f(x)$ má v intervalu $\langle a, b \rangle$ tutéž funkční hodnotu pro každé x , říkáme, že funkce $f(x)$ je konstantní v $\langle a, b \rangle$. Například $f(x) = 3$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

2. Polynom

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{pro } x \in E_1,$$

kde $n \geq 0$ celé, $a_i \in E_1$, $i = 0, 1, \dots, n$

a_i nazýváme koeficient polynomu.

Stupeň polynomu je nejvyšší mocnina x , u které stojí nenulový koeficient.

3. Racionální funkce

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy $x \in E$ [$x \in E_1$, $Q(x) \neq 0$]

1.4. Příklady funkcí v ekonomice

1. Byla zjištěna tato závislost odbytu drůbežího masa (v tunách) na ceně v Kčs (čísla jsou vymyšlena):

Cena	9	12	15	18
Odbyt	1030	900	795	715

Tuto závislost vyhodnotíme graficky takto (graf 13):

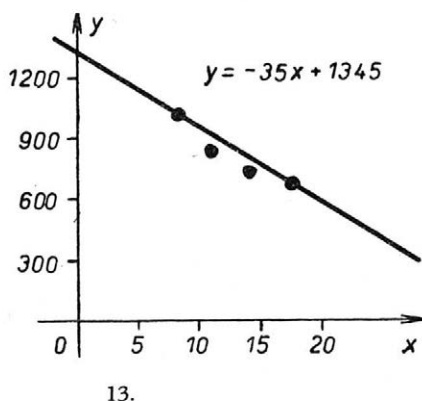
Je zřejmé, že závislost ceny a prodaného zboží je téměř lineární. Funkce, která popisuje tuto závislost, má tvar:

$$y = -35x + 1345.$$

Můžeme usoudit, že k uspokojení trhu při ceně 10 je třeba vyrobit zhruba 1000 tun.

2. Elektrické dojíací přístroje se prodávají za p. 1000 Kčs; je známo, že se prodá za rok x set kusů, kde

$$x = \frac{90}{p+5} - 6$$



13.

(vztah je uměle konstruován). Tato závislost umožňuje zjistit, při které ceně dochází prakticky k zastavení odbytu. To je pro $x = 0 \Rightarrow p = 10$.

1.5. Pojem limity a spojitosti funkce

Při vyšetřování průběhu funkce nastávají v některých případech obtíže, které osvětlíme na příkladech:

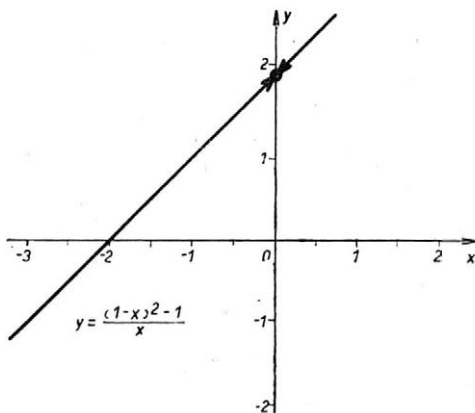
Příklad 7. Graficky znázorníme průběh funkce $y = \frac{(1-x)^2 - 1}{x}$

Definiční obor $D = \{x \in E_1, x \neq 0\}$

Z grafu 14 je zřejmé, že funkce není definována v bodě 0, ale v jeho okolí se chová jako přímka. Potřebovali bychom nyní nějaký pojem, který by tuto závislost „spojitě“ doplnil. Tuto skutečnost můžeme formulovat takto: Liší-li se x velmi málo od 0, liší se $f(x)$ málo od 2. K matematickému vyjádření použijeme této definice:

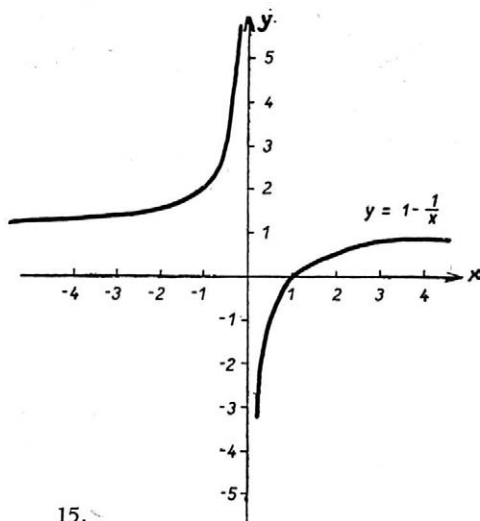
Definice: Necht $c \in E_1, a \in E_1$. Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě c za limitu číslo a , jestliže k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro všechna x , pro která je $0 < |x - c| < \delta$ platí $|f(x) - a| < \varepsilon$, značíme $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a$.

Někdy potřebujeme popsat vlastnosti funkce „v nekonečně vzdáleném bodě“ (nevlastním bodě).



14.

Definice: Říkáme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $x_0 \in E_1$ tak, že pro všechna $x > x_0$ platí $|f(x) - A| < \varepsilon$.



15.

potom

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \quad \text{pro } g(x) \neq 0, b \neq 0$$

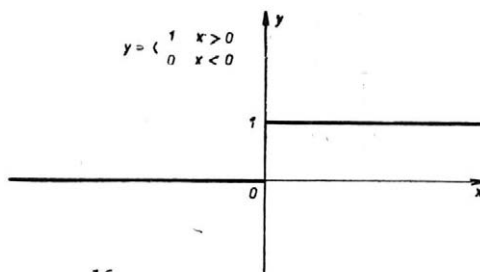
1.6. Spojitost

Dosud jsme kreslili graf funkce jako přímku nebo křivku, na jejíž průběh jsme usoudili z několika bodů. Ke správnosti tohoto postupu je třeba zavést pojem spojitosti funkce.

Příklad 9. Nakresleme graf funkce $g(x)$ definované předpisem

$$g(x) = 1 \quad \text{pro } x \geq 0$$

$$g(x) = 0 \quad \text{pro } x < 0.$$



16.

Příklad 8. $y = f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

Dokážeme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Najdeme číslo x_0 tak, aby vyhovovalo definici. Pro $x > x_0$ má platit $\left| 1 - \frac{1}{x} - 1 \right| < \varepsilon$. Upravíme nerovnost na tvar $\frac{1}{x} < \varepsilon \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$ a za x_0 můžeme mít číslo $\frac{1}{\varepsilon}$.

Například, je-li $\varepsilon = \frac{1}{2}$, potom stačí, aby číslo $x_0 = 2$, neboť pro $x > 2$ je $\left| 1 - \frac{1}{x} - 1 \right| < \frac{1}{2}$.

Věta 1.5.1. Necht' $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a$

a $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = b$,

Definice: Říkáme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě c , jestliže $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Věta 1.6.1. Necht' $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojitě v bodě c , potom funkce $|f(x)|$, $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ jsou spojitě v bodě c , a je-li $g(c) \neq 0$, jsou také funkce $\frac{1}{g(x)}$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ spojitě v bodě c .

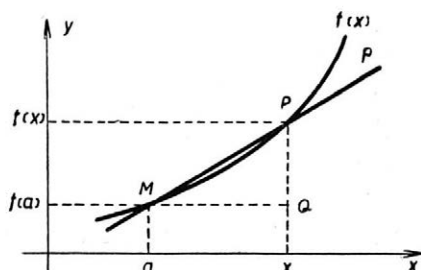
Definice: Říkáme, že funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu (a, b) , je-li spojitá v každém bodě $c \in (a, b)$.

Poznámka: Funkce $y = k$, $y = P(x)$, $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ pro $Q(x) \neq 0$ jsou spojitě funkce v E_1 .

1.7. Derivace funkce

Při vyšetřování lokálních vlastností funkcí, často užíváme pojmu derivace. Předtím, než budeme tento pojem definovat, podrobně rozebereme jeho geometrickou interpretaci.

Při vyšetřování nás často zajímá „směr“ křivky v určitém bodě. Přitom „směrem“ budeme rozumět směr tečny ke křivce v tomto bodě. Přímka $\{M, P\}$ je sečnou křivky, jestliže bod P se „blíží“ k bodu M po křivce, potom přímka $\{M, P\}$ přechází v tečnu v bodě M . Směrnice sečny $\{M, P\}$ je



17.

$$\frac{PQ}{QM} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}; \text{ jestliže } P \rightarrow M \Rightarrow x \rightarrow a$$

a směrnice se mění takto $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Definice: Necht $a \in E_1$. Limitu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ nazýváme derivaci funkce $f(x)$

v bodě a a značíme $f'(a)$. Neexistuje-li limita, pak říkáme, že $f(x)$ nemá derivaci.

Poznámka: Mějme nyní $f(x)$ definovanou pro $x \in D$. Spočítejme v každém bodě $x \in D$ derivaci funkce $f(x)$ (pokud existuje); tímto přiřazením dostaneme novou funkci $f'(x)$, které říkáme derivace funkce $f(x)$ s definičním oborem $D' \subset D$.

Jiná značení:

derivace v bodě:

$$f'(a) = \left[f(x) \right]'_{x=a} = \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=a}$$

derivace funkce:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = y' = \frac{dy}{dx} = [f(x)]'$$

Věta 1.7.1. Má-li funkce $f(x)$ v bodě $a \in E_1$ derivaci, potom $f(x)$ je spojitá v bodě a .

Z derivace lze usoudit na průběh funkce. K tomu zavedeme některé pojmy.

Definice: Říkáme, že funkce je rostoucí v intervalu (a, b) , jestliže pro každé dva body $x_1 \in (a, b)$, $x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$. Funkce je klesající v intervalu (a, b) , jestliže pro každé dva body $x_1 \in (a, b)$, $x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Věta 1.7.2. Jestliže funkce $f(x)$ definovaná v intervalu (a, b) má v tomto intervalu derivaci $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), potom $f(x)$ v intervalu (a, b) je rostoucí (klesající).

Poznámka: Je-li derivace v bodě a kladná, tj. $f'(a) > 0$, pak existuje interval (a_1, b_1) takový, že $a \in (a_1, b_1)$, $f(x)$ je v tomto intervalu rostoucí. Podobně je tomu v případě $f'(a) < 0$.

1.8. Derivace elementárních funkcí

- $[f(x)]' = 0$ kde $f(x) = \text{const.}$
- $[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$
- $[\sin x]' = \cos x$

$$4. [\cos x]' = -\sin x$$

$$5. [e^x]' = e^x$$

$$6. [\ln x]' = \frac{1}{x}$$

Věta 1.8.1. Necht existují derivace $f'(a)$ a $g'(a)$ a necht K je libovolná konstanta, potom

1. funkce $K \cdot f(x)$ má v bodě a derivaci $K f'(a)$

2. funkce $f(x) \pm g(x)$ má v bodě a derivaci $f'(a) \pm g'(a)$

3. funkce $f(x) \cdot g(x)$ má v bodě a derivaci $f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

4. a je-li $g(a) \neq 0$, potom funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ má v bodě a

$$\text{derivaci } \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Příklad 10. Vypočteme derivaci funkce $y = \frac{1}{60}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$. Počítáme jako součet derivací těchto funkcí:

$$\frac{1}{60}x^2, \frac{1}{5}x, \frac{7}{5}.$$

$$\left[\frac{1}{60}x^2\right]' = \frac{1}{30}x, \left[\frac{1}{5}x\right]' = \frac{1}{5}, \left[\frac{7}{5}\right]' = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{30}x - \frac{1}{5}.$$

Příklad 11. Vypočteme derivaci funkce $y = \frac{x}{x+1}$. Použijeme čtvrté tvrzení z věty 1.8.1. V našem případě je: $g(x) = x+1, f(x) = x; g(x) \neq 0$ pro $x \neq -1$. Tedy derivace

$$y \text{ má tvar } y' = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{a} \quad D' = \{x \in E_1; x \neq -1\}.$$

Příklad 12. Vypočteme derivaci funkce $y = x \cdot e^x$; podle věty 1.8.1.
 $y' = e^x + x e^x = (1+x)e^x.$

Příklad 13. Bylo zjištěno, že cenu vajec během určitého roku lze popsat funkcí

$$y = \frac{1}{60}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{7}{5},$$

kde x je čas, vyjádřený v měsících.

Můžeme zjistit, jak se v průběhu roku cena měnila

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{30}x - \frac{1}{5}.$$

Podle znaménka derivace (podle věty 1.7.2) určíme, kdy cena klesala a kdy stoupala:

$$\text{I. } \frac{1}{30}x - \frac{1}{5} < 0 \Rightarrow x - 6 < 0 \Rightarrow x < 6 \Rightarrow$$

cena klesala v prvním pololetí;

$$\text{II. } \frac{1}{30}x - \frac{1}{5} > 0 \Rightarrow x - 6 > 0 \Rightarrow x > 6 \Rightarrow$$

cena ve druhém pololetí stoupala.

1.9. Derivace vyšších řádů

Funkci $f'(x)$ můžeme znovu derivovat, a tím dostáváme druhou derivaci funkce $f(x)$ a značíme ji $f''(x)$.

Opakujeme-li tento postup n -krát, dostaneme n -tou derivaci funkce $f(x)$ a značíme ji $f^{(n)}(x)$.

Příklad 14. Funkce $y = x^4$ má postupně tyto derivace:

$$y' = 4x^3 \quad x \in E_1$$

$$y'' = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2 \quad x \in E_1$$

$$y''' = 2 \cdot 12x = 24x \quad x \in E_1$$

$$y^{(4)} = 24 \quad x \in E_1$$

$$y^{(5)} = 0 \quad x \in E_1$$

$$y^{(n)} = 0 \text{ pro } n \geq 5 \quad x \in E_1$$

1.10. Konvexnost a konkávnost funkce v intervalu

Definice: Necht funkce $f(x)$ je definována v intervalu J , jestliže pro každá čísla $x_1, x_2, x_3 \in J$ splňující nerovnost $x_1 < x_2 < x_3$ leží bod $B_2 = [x_2, f(x_2)]$

- Pod přímkou $p = \{B_1, B_3\}$, $B_1 = [x_1, f(x_1)]$, $B_3 = [x_3, f(x_3)]$

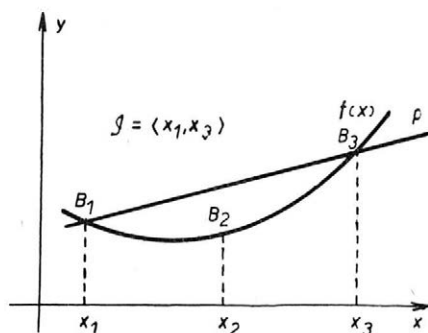
říkáme, že funkce $f(x)$ je ryze konvexní v J

- Nad přímkou p říkáme, že funkce $f(x)$ je ryze konkávní v J

- Pod nebo na přímce p říkáme, že funkce $f(x)$ je konvexní v J

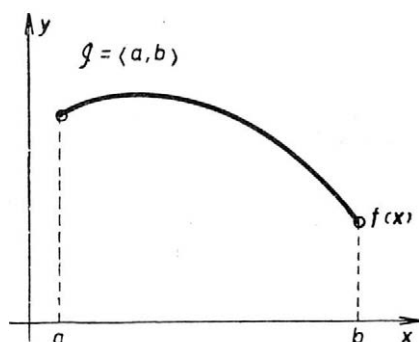
- Nad nebo na přímce p říkáme, že funkce $f(x)$ je konkávní v J

Věta 1.10.1: Necht funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu J a necht existuje druhá derivace $f''(x)$ ve všech vnitřních bodech intervalu J , potom platí:



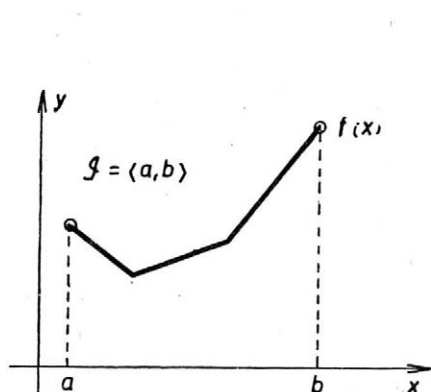
18.

Jestliže ve všech vnitřních bodech J je $f''(x) > 0$, je $f(x)$ ryze konvexní v J



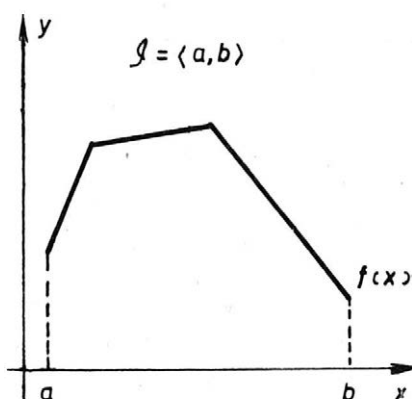
19.

Jestliže ve všech vnitřních bodech J je $f''(x) < 0$, je $f(x)$ ryze konkávní v J



20.

3. Jestliže ve všech vnitřních bodech J je $f''(x) \geq 0$, je $f(x)$ konvexní v J



21.

4. Jestliže ve všech vnitřních bodech J je $f''(x) \leq 0$, je $f(x)$ konkávní v J

1.11. Extrémy funkcí spojitých v intervalu

Definice: Necht funkce $f(x)$ je definovaná v intervalu (a, b) .

I. Existuje-li v $\langle a, b \rangle$ bod c tak, že pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ platí nerovnost $f(x) \leq f(c)$, říkáme, že funkce $f(x)$ nabývá v intervalu $\langle a, b \rangle$ svého maxima v bodě c , nebo že hodnota $f(c)$ je maximum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$ a značíme $f(c) = \max_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$

II. Existuje-li v $\langle a, b \rangle$ bod d tak, že pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ platí nerovnost $f(x) \geq f(d)$, říkáme, že funkce $f(x)$ nabývá v intervalu $\langle a, b \rangle$ svého minima v bodě d , nebo že hodnota $f(d)$ je minimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$, a značíme

$$f(d) = \min_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$$

Věta 1.11.1. Necht funkce $f(x)$ je spojitá v $(a_1, b_1) \supset \langle a, b \rangle^*$ a necht funkce $f(x)$ má derivaci v (a_1, b_1) . Potom nabývá svého maxima v $\langle a, b \rangle$ v jednom z těchto bodů:

1. v bodě a
2. v bodě b
3. v bodě $c \in \langle a, b \rangle$, kde $f'(c) = 0$.

Příklad 15. Určíme nejmenší cenu vajec (viz příklad 11).

$$\text{Minimum funkce určující cenu } y = \frac{1}{60}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{7}{5} \text{ pro } x \in \langle 0, 12 \rangle$$

podle věty 1.11.1.

* $(a_1, b_1) \supset \langle a, b \rangle$ značí, že všechny body intervalu $\langle a, b \rangle$ jsou obsaženy v intervalu (a_1, b_1) .

1. $y(0) = 1,2$
2. $y(12) = 1,2$
3. $y'(x) = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y(6) = 0,8$

Tedy funkce $y(x)$ dosahuje minima na intervalu $\langle 0, 12 \rangle$ v bodě $x = 6$, a toto minimum je rovno 0,8.

Cena vajec je nejnižší v červnu, kdy jedno vejce stojí průměrně 80 haléřů.

Příklad 16. Elektrické dojíací přístroje se prodávají za $p \cdot 1000$ Kčs. Vztah spotřeby a ceny je

$$x = \frac{90}{p+5} - 6.$$

Určeme cenu přístroje tak, aby zisk byl maximální.

Zisk vypočteme podle vzorce $z(p) = p \cdot x$, kde x je počet prodaných kusů.

Dosadíme-li do vzorce pro zisk, obdržíme:

$$z(p) = p \cdot \left(\frac{90}{p+5} - 6 \right),$$

přitom p může probíhat od 0 do 10 (při ceně 10 000 ustává prodej); $p \in \langle 0, 10 \rangle$ v tomto intervalu máme určit cenu, při níž funkce $z(p)$ nabývá maxima.

Maximum určíme podle věty 1.10.1.

1. $z(0) = 0$
 2. $z(10) = 0$
- } v krajních bodech je zisk nulový.
3. Bod, ve kterém je $z(p)$ maximální, určíme podle toho, kde $z'(p) = 0$.

Počítejme

$$z'(p) = \frac{90}{p+5} - 6 - p \cdot \frac{90}{(p+5)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = -5 \pm 5\sqrt{3} \approx 3,5$$

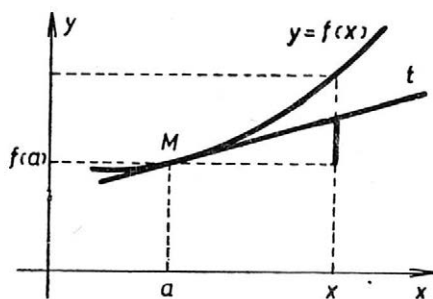
$$z(3,5) = 1603$$

To znamená maximální zisk 1 603 000 Kčs je při ceně 3500 Kčs a potřebná produkce je 458 přístrojů.

1.12. Diferenciál funkce jedné proměnné

Definice: Existuje-li derivace $f'(a)$, nazýváme výraz $f'(a) \cdot (x - a)$ $x \in \varepsilon[x \in E, \delta > |x - a| > 0]$, který je lineární funkcí proměnné x , diferenciálem funkce $f(x)$ v bodě a , a značíme $df(x, a)$ tj. $df(x, a) = f'(a) \cdot (x - a)$.

Tento pojem si názorně vysvětlíme:



22.

Přímka $t \equiv f'(a)(x - a) + f(a)$ je tečnou ke křivce $f(x)$ v bodě $[a, f(a)]$.

Diferenciál $df(x, a)$ je roven přírůstku y -ové souřadnice bodu na tečně t .

Poznámka: Diferenciál funkce $f(x)$ v bodě a nám s jistou přesností popisuje chování funkce $f(x)$ v okolí bodu a . Diferenciál je lineární funkce, a pokud nás zajímají jen přibližné hodnoty funkce $f(x)$ v okolí bodu a , můžeme je velmi snadno zjistit.

III. Základní pojmy matematické analýzy v ekonomické interpretaci (Pokračování)

2. FUNKCE VÍCE NEZÁVISLE PROMĚNNÝCH

2.1. Pojem funkce více nezávisle proměnných

Při studiu závislosti různých veličin na sobě se často setkáme s případem, kdy jedna veličina závisí na několika ostatních. V matematice ke studiu takových závislostí používáme pojem funkce několika proměnných.

Definice. Mějme v prostoru R_n množinu M bodů $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, potom říkáme, že na množině M je definována reálná funkce n reálných proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$, je-li dán předpis, podle kterého každému bodu $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in M$ je přiřazeno právě jedno reálné číslo y . Množinu M nazýváme definičním oborem funkce a značíme

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{pro } [x_1, x_2, \dots, x_n] \in M.$$

Příklad 1.

$$\begin{aligned} y &= 3x_1x_2 && \text{pro } 0 < x_1 < 1 \\ & && -\infty < x_2 < +\infty \\ y &= \frac{x_1^3}{x_1 - x_2 + 1} && \text{pro } x_1 - x_2 + 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Poznámka. Grafem funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je množina bodů $[x_1, x_2, \dots, x_n, y]$ v R_{n+1} , kde $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in M$. Funkci dvou proměnných lze graficky znázornit v trojrozměrném prostoru.

Podobně jako u funkcí jedné proměnné zavedeme pro funkce více nezávisle proměnných pojmy *spojitost*, *limita*, *parciální derivace*.

2.2. Spojitost a limita

Definice. δ -okolím bodu $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ nazýváme množinu všech bodů $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, které mají vzdálenost od bodu P menší než δ a značíme $O(P, \delta)$, tj.

$$\delta < \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 + \dots + (x_n - p_n)^2}.$$

Poznámka. Jednotkové δ -okolí bodu $P = [0, 0, 0]$ je jednotková koule v trojrozměrném prostoru se středem v bodě P .

Definice. Říkáme, že funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ má v bodě $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ limitu $a \in E_1$, existuje-li ke každému $\varepsilon > 0$ číslo $\delta > 0$, že pro všechny body $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ z δ -okolí bodu P $X \neq P$ platí

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - a| < \varepsilon.$$

Značíme

$$\begin{aligned} \lim_{[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow P} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a \text{ resp. } \lim_{[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow [p_1, p_2, \dots, p_n]} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a \end{aligned}$$

Poznámka. Je-li $n = 2$, můžeme psát

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x_1 \rightarrow p_1 \\ x_2 \rightarrow p_2}} f(x_1, x_2) &= a \end{aligned}$$

Definice. Říkáme, že funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je v bodě $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ spojitá, jestliže je v tomto bodě definována a platí-li

$$\lim_{[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow P} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

Věta 2. 2. 1. Necht funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je definována v bodě P . Pak je v bodě P spojitá právě tehdy, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechny body $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ z δ -okolí bodu P platí

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(p_1, p_2, \dots, p_n)| < \varepsilon.$$

Poznámka. Názorný význam předcházejících definic je tento: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ má v bodě P limitu a , resp. je v bodě P spojitá, je-li $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dosti blízká hodnotě a , resp. hodnotě $f(p_1, p_2, \dots, p_n)$ pro body dosti blízké bodu P .

Definice. Je-li funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ spojitá v každém bodě množiny D , říkáme, že $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je spojitá v množině D .

Příklad 2. $y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ je spojitá na množině $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$.

Věta 2 2 2. Necht limita funkce $f(x_1, x_2)$ v bodě $P = (p_1, p_2)$ je rovna a a limita funkce $g(x_1, x_2)$ v bodě $P = (p_1, p_2)$ je rovna b , potom funkce $k \cdot f(x_1, x_2)$ pro $(k \in E_1)$, $f(x_1, x_2) \pm g(x_1, x_2)$, $\frac{f(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)}$ za předpokladu, že $b \neq 0$, mají v bodě (p_1, p_2) limitu a platí

$$\begin{aligned} \lim_{[x_1, x_2] \rightarrow P} k \cdot f(x_1, x_2) &= k \cdot a, & \lim_{[x_1, x_2] \rightarrow P} [f(x_1, x_2) \pm g(x_1, x_2)] &= a \pm b, \\ \lim_{[x_1, x_2] \rightarrow P} \frac{f(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)} &= \frac{a}{b}, & \lim_{[x_1, x_2] \rightarrow P} f(x_1, x_2) \cdot g(x_1, x_2) &= a \cdot b \end{aligned}$$

Obdobná věta platí i pro spojitost funkce a platnost obou vět lze dokázat pro funkce n nezávisle proměnných.

2.3. Některé pojmy z teorie množin

Definice. Vnitřním bodem množiny M nazýváme bod, k němuž existuje δ -okolí, které celé leží v množině M .

Definice. Bod B se nazývá hraničním bodem množiny M , jestliže v každém δ -okolí existuje alespoň jeden bod, který patří do M a alespoň jeden bod, který nepatří do M . Všechny hraniční body množiny M nazýváme hranici množiny M .

Definice. Vzdálenosti bodu P od množiny M nazýváme číslo $\inf_{X \in M} \varrho(P, X)^*$ a značíme $\varrho(P, M)$.

Definice. Uzávěr množiny M je množina bodů, které mají vzdálenost od množiny M rovnou nule, a značíme $\bar{M}$.

Definice. Je-li $M = \bar{M}$, říkáme, že množina M je uzavřená.

Definice. Množina M je omezená, existuje-li číslo $K \in E_1$ tak, že $\varrho(x, y) < K$ pro $x, y \in M$.

2.4. Parciální derivace

Definice. Říkáme, že funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ má v bodě $[p_1, p_2, \dots, p_n]$ parciální derivaci podle proměnné x_i pro $i = 1, 2, \dots, n$, existuje-li limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p_1, p_2, \dots, p_i + h, \dots, p_n) - f(p_1, p_2, \dots, p_n)}{h}$$

a značíme ji $\frac{\partial}{\partial x} f(x_1, x_2, \dots, x_n) (x_1 = p_1, x_2 = p_2, \dots, x_n = p_n)$ resp. $\frac{\partial y}{\partial x_i} (x_i = p_i)$

Poznámka. Při výpočtu parciální derivace derivujeme danou funkci jako funkci jediné proměnné (ke které máme vypočítat derivaci), ostatní proměnné přitom považujeme za konstanty.

Příklad 3.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^3 \cdot x_2 & \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= 3x_1^2 \cdot x_2 & \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= x_1^3 \\ f(x_1, x_2) &= \sin(x_1 \cdot x_2) & \frac{\partial f}{\partial x_2} &= x_1 \cdot \cos(x_1 \cdot x_2) \end{aligned}$$

*) $\inf_{X \in M} \varrho(P, X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{X \in M} \varrho(P, X)$

Poznámka. Řezem plochy $y = f(x_1, x_2)$ s rovinou $x_1 = p_1$ je křivka $f(p_1, x_2)$ (y je při konstantním x_1 funkcí proměnné x_2), $\frac{\partial f}{\partial x_2} [x_1 = p_1; x_2 = p_2]$ je směrnici tečny této křivky v bodě $[p_1, p_2; f(p_1, p_2)]$.

Definice. Necht funkce $y = f(x_1, x_2)$ má v bodě P spojitě parciální derivace podle obou proměnných, potom výraz $dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$ se nazývá totální diferenciál funkce $f(x_1, x_2)$.

Poznámka. Podobně jako nahrazujeme u funkce jedné proměnné v prvním přiblížení přírůstek funkce diferenciálem (viz odst. 1.12. této kapitoly), tak také zde přírůstek funkce nahrazujeme totálním diferenciálem.

Příklad. $f(x, y) = x^3 + 4y^3$. Funkční hodnota pro $x = 1, y = 0,5$ je $f(1; 0,5) = 1,5$.

Přibližně určíme hodnotu funkce $f(1,11; 0,58)$, $dx = 0,11$ $dy = 0,08$ a tedy diferenciál v bodě $(1; 0,5)$ je $\Delta f(xy) = 3x^2 \cdot dx + 12y^2 \cdot dy = 3 \cdot 0,11 + 12(0,5)^2 \cdot 0,08 = 0,57$.

Z toho plyne, že $f(1,11; 0,58) \approx f(1; 0,5) + 0,57 = 2,07$.

Přesná hodnota je 2,14.

2.5. Extrémy funkcí více proměnných

Definice. Říkáme, že funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nabývá v bodě $[p_1, p_2, \dots, p_n]$ maxima na množině M , jestliže pro všechny body $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, pro něž $X \in M$ platí $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Věta 2.5.1. Funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nabývá na množině M extrém v jednom z těchto bodů:

- $\frac{\partial f}{\partial x_i} [x_i = p_i] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$
- v bodech, kde neexistuje parciální derivace
- na hranici množiny M .

2.6. Příklady funkcí více nezávisle proměnných v ekonomii

1. Mlékárna vyrábí dva druhy taveného sýra s průměrnými výrobními náklady na 1 kus 1,50 Kčs a 1,80 Kčs. Jestliže p_1 a p_2 jsou ceny, potom požadavek trhu je vyjádřen vztahem

$$x_1 = 5(p_2 - p_1) \quad x_2 = 32 + 5p_1 - 10p_2 \quad (1)$$

v tisíci kusech za týden. Vztahy (1) byly získány mlékárnou stálým průzkumem na trhu pomocí regresní analýzy. Tato metoda bude vysvětlena v kapitole Matematická statistika. Určíme ceny sýrů tak, aby zisk byl maximální.

Zisk $f(p_1, p_2)$ je funkcí cen obou sýrů a platí

$$g(p_1, p_2) = \frac{f(p_1, p_2)}{1000} = x_1 p_1 + x_2 p_2 - 1,5 \cdot x_1 - 1,8 \cdot x_2 = 5(p_2 - p_1) + (32 + 5p_1 - 10p_2)p_2 - 1,5(p_2 - p_1) \cdot 5 - 1,8(32 + 5p_1 - 10p_2) = (5p_1 - 7,5)(p_2 - p_1) + (p_2 - 1,8)(32 + 5p_1 - 10p_2)$$

Hledíme maximum této funkce na množině $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$ podle věty 2.5.1.

c) na hranici množiny:

$$g(0, p_2) = -7,5 p_2 + (p_2 - 1,8)(32 - 10 p_2);$$

najdeme extrém této funkce v oboru $p_2 \geq 0$ podle věty 1.11.1.

$$g(0, 0) = -1,8 \cdot 32 = -57,6$$

$$\frac{\partial g(0, p_2)}{\partial p_2} = -7,5 + (32 - 10 p_2) - 10(p_2 - 1,8) = -20 p_2 - 42,5,$$

tedy pro $p_2 \geq 0$ je $\frac{\partial g(0, p_2)}{\partial p_2} < 0$

funkce $g(0, p_2)$ klesá pro $p_2 \geq 0$
 $\max_{p_2 \geq 0} g(0, p_2) = g(0, 0) = -57,6$;

na této části hranice ($p_2 \geq 0$) tedy extrém neleží.

Vyšetřme druhou část hranice:

$$g(p_1, 0) = -p_1(5p_1 - 7,5) - (32 + 5p_1) \cdot 1,8$$

$$\frac{\partial g(p_1, 0)}{\partial p_1} = 7,5 - 5p_1 - 5p_1 - 9 = -10p_1 - 1,5;$$

zde rovněž pro $p_1 \geq 0$ je $\frac{\partial g(p_1, 0)}{\partial p_1} < 0$

a extrém ani na této části hranice neleží.

b) v bodech, kde neexistuje parciální derivace:

v našem případě existují obě parciální derivace v R_2 .

a) v bodech, kde $\frac{\partial g(p_1, p_2)}{\partial p_1} = \frac{\partial g(p_1, p_2)}{\partial p_2} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(p_1, p_2)}{\partial p_1} &= 5(p_2 - p_1) - 5(p_1 - 1,5) + 5(p_2 - 1,8) = \\ &= 10p_2 - 10p_1 - 1,5 = 0 \Rightarrow p_2 - p_1 = 0,15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(p_1, p_2)}{\partial p_2} &= 5(p_1 - 1,5) + (32 + 5p_1 - 10p_2) - 10(p_2 - 1,8) = \\ &= 10p_1 - 20p_2 + 42,5 = 0 \end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic $p_2 - p_1 = 0,15$

$$10p_1 - 20p_2 = -42,5$$

dostáváme:

$$p_1 = 3,95 \quad p_2 = 4,1$$

Dosazením do rovnic pro x_1 a x_2 dostáváme

$$x_1 = 0,75 \quad a \quad x_2 = 10,75$$

Pro zisk platí $g(3,95; 4,1) = 15,815$

Maximálního zisku 15 815 Kčs je dosaženo při cenách

$$p_1 = 3,95 \text{ Kčs} \quad , \quad p_2 = 4,10 \text{ Kčs}$$

a nutná produkce je 750 kusů prvního druhu a 10 750 kusů druhého druhu sýra.

2. Zajímavé výsledky dostaneme, budeme-li předpokládat, že každý druh sýra vyrábí jiná mlékárna a obě určují cenu sýra tak, aby byl jejich zisk maximální.

Zisk první mlékárny označme $f_1(p_1, p_2)$ a platí

$$\begin{aligned} g_1(p_1, p_2) &= \frac{f_1(p_1, p_2)}{1000} = x_1 p_1 - 1,5 x_1 = 5 p_1 (p_2 - p_1) - \\ &- 7,5 (p_2 - p_1) = (5 p_1 - 7,5) (p_2 - p_1) \end{aligned}$$

zisk druhé mlékárny označme $f_2(p_1, p_2)$, potom

$$\begin{aligned} g_2(p_1, p_2) &= \frac{f_2(p_1, p_2)}{1000} = x_2 p_2 - 1,8 x_2 = (32 + 5 p_1 - 10 p_2) \cdot p_2 - \\ &- 1,8 \cdot (32 + 5 p_1 - 10 p_2) = (32 + 5 p_1 - 10 p_2) (p_2 - 1,8) \end{aligned}$$

První mlékárna určí cenu svého výrobku tak, aby její zisk byl maximální (za předpokladu, že cena sýra druhé mlékárny je konstantní).

Hledáme maximum funkce $g_1(p_1, p_2)$ v oboru $p_1 \geq 0$ a $p_2 = \text{konst.}$ Na funkci $g_1(p_1, p_2)$ se díváme jako na funkci jedné proměnné. Podle věty 1.11.1. platí

$$g_1(0, p_2) = -7,5 p_2$$

$$\frac{\partial g_1(p_1, p_2)}{\partial p_1} = 5(p_2 - p_1) + 7,5 - 5p_1 = -10p_1 + 5p_2 + 7,5 = 0$$

Podobnou úvahu provedeme pro druhou mlékárnu:

$$g_2(p_1, 0) = -1,8(32 + 5p_1)$$

$$\frac{\partial g_2(p_1, p_2)}{\partial p_2} = -10(p_2 - 1,8) + (32 + 5p_1 - 10p_2) = 5p_1 - 20p_2 + 50 = 0$$

Ceny určíme řešením soustavy:

$$-10p_1 - 5p_2 = -7,5$$

$$p_1 - 4p_2 = -10$$

$$p_1 = 2,29$$

$$p_2 = 3,07$$

Dosazením do rovnic (1) pro x_1 a x_2 dostaneme

$$x_1 = 3,9$$

$$x_2 = 12,75$$

Maximální zisk první mlékárny při ceně $p_1 = 2,29$ Kčs činí 2686 Kčs, zisk druhé mlékárny při ceně $p_2 = 3,07$ Kčs činí 15 192 Kčs.

Celkový zisk obou mlékáren je nižší než v případě, kdy oba druhy sýra vyrábí jedna mlékárna. (Oba příklady jsou vymyšleny.)

3. INTEGRÁL FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

3.1. Určitý a neurčitý integrál

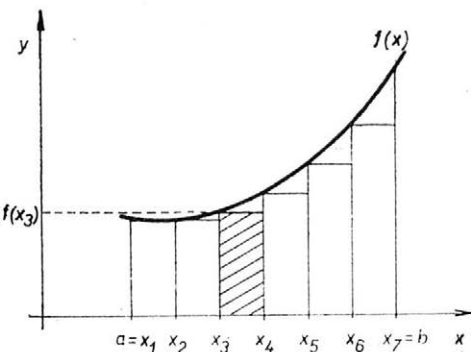
Pomocí integrálů vyčísľujeme plochy omezené křivkami. V tomto odstavci funkci budeme rozumět spojitou funkcí v celém definičním oboru.

Definice. Určitým integrálem funkce $f(x)$ (od a do b) nazýváme číslo

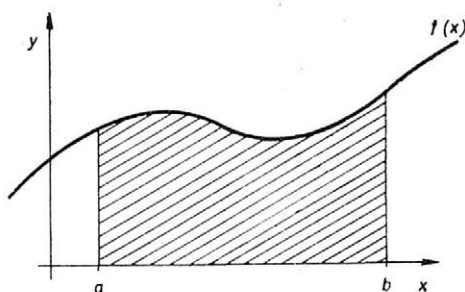
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) (x_{i+1} - x_i), \text{ kde}$$

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b$$

a značíme $\int_a^b f(x) dx$; číslo a nazýváme dolní mez integrálu, b horní mez.



23.



24.

Součet v definici je součtem ploch obdélníků, jak je naznačeno na obrázku. Plocha vyšrafovaného obdélníku odpovídá sčítanci $f(x_3) \cdot (x_4 - x_3)$.

Vyšrafovaná plocha je $\int_a^b f(x) dx$.

Hodnota určitého integrálu $\int_a^b$ závisí na tvaru funkce $f(x)$, dále na číslech a, b .

Nechejme dolní mez a pevnou a měňme postupně horní mez. $\int_a^t f(x) dx$ je potom funkcí proměnné t , neboť ke každému číslu t existuje právě jedna hodnota $F(t) = \int_a^t f(x) dx$.

Definice. Funkci $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ nazýváme neurčitým integrálem (primitivní funkcí) funkce $f(x)$.

Věta 3.1.1.

$$\frac{d}{dt} \left(\int_a^t f(x) dx \right) = f(x).$$

Věta 3.1.2.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Věta 3.1.3.

Nechť $F(t) = \int_a^t f(x) dx$, potom

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c).$$

Neboť například pro $d > t, c < a$ můžeme psát

$$\int_c^a f(x) dx = \int_c^a f(x) dx + \int_a^d f(x) dx = - \int_a^c f(x) dx + \int_a^d f(x) dx = F(d) - F(c).$$

Poznámka. Speciálně $F(a) = 0$, tedy neurčitý integrál na dolní mezi nezávisí. Dále jej budeme značit bez mezi

$$\int_a^t f(x) dx = \int f(x) dx = F(x).$$

3.2. Přehled základních neurčitých integrálů

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad a \neq -1, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\int \cos x dx = \sin x \quad x \in E_1$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x \quad x \in E_1$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \quad a \neq 0, x \in E_1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log(x) \quad x \neq 0, x \in E_1$$

$$\int k \cdot dx = k \cdot x \quad x \in E_1$$

Uvedeme metodu, která nám umožní pomoci 3.2. vypočítat integrály některých dalších funkcí.

3.3. Metoda „per partes“

3.3.1. Necht $f(x)$ a $g(x)$ mají derivace v (a, b) , potom platí pro $x \in (a, b)$ vztah

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) g(x) \, dx$$

Příklad 1. $\int x \cdot e^x \, dx \quad f(x) = x$

$$g'(x) = e^x \implies f'(x) = 1, g(x) = e^x$$

$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x = e^x (x - 1) \quad x \in E_1$$

Příklad 2. $\int x^2 \cos x \, dx \quad f(x) = x^2 \quad g'(x) = \cos x \implies f'(x) = 2x, g(x) = \sin x$

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \cdot \sin x - \int 2x \cdot \sin x \, dx$$

Na druhý integrál opět použijeme větu 3.3.1.

$$\begin{aligned} \int 2x \cdot \sin x \, dx \quad f(x) = 2x \quad g'(x) = \sin x \implies \\ f'(x) = 2 \quad g(x) = -\cos x \end{aligned}$$

$$\int 2x \cdot \sin x \, dx = 2x \cdot (-\cos x) + \int 2 \cos x \, dx = -2x \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x.$$

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \cdot \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x \cdot x \in E_1.$$

Příklad 3. Máme určit průměrnou cenu vajec, která se měnila v průběhu roku podle vzorce:

$$f(x) = \frac{1}{60} x^2 - \frac{1}{5} x + \frac{7}{5}, \quad (\text{viz př. 13 odst. 1/III})$$

kde x jsou měsíce.

Průměrnou cenu vypočteme podle vzorce:

$$\frac{1}{12} \int_0^{12} \left(\frac{1}{60} x^2 - \frac{1}{5} x + \frac{7}{5} \right) dx.$$

Podle 3.2. vypočteme hodnotu našeho určitého integrálu:

$$\int \left(\frac{1}{60} x^2 - \frac{1}{5} x + \frac{7}{5} \right) dx = \frac{1}{3 \cdot 60} x^3 - \frac{1}{2 \cdot 5} x^2 + \frac{7}{5} x = F(x)$$

$$\int_0^{12} \left(\frac{1}{60} x^2 - \frac{1}{5} x + \frac{7}{5} \right) dx = F(12) - F(0) = 12 - 0$$

Průměrná cena vajec je 1,00 Kčs.

Literatura

R. G. D. Allen: Mathematical Analysis for Economists, Macmillan and Co., London, 1947.

IV. Vybrané metody matematické statistiky

1. ELEMENTY POČTU PRAVDĚPODOBNOSTI

! Počet pravděpodobnosti se zabývá číselným hodnocením náhodných jevů. S náhodnými jevy se setkáváme při různých pokusech náhodné povahy.

Při pozorování a konání pokusů usilujeme o to, abychom z výsledků pozorování nebo pokusů mohli vyslovit některé obecné závěry o zkoumaných jevech. Proto pozorování nebo pokusy konáme na rozsáhlých souborech vzájemně rovnocenných, nezávislých předmětů. Postupujeme v podstatě tak, že si předem určíme pevný komplex podmínek a pokusy nebo pozorování konáme v rámci tohoto komplexu podmínek. Můžeme pak říci, že experimenty nebo jednotlivá pozorování jsou realizací pevného komplexu podmínek. Jevy, které při nezávislém opakování realizace pevného komplexu podmínek mohou nastat a jejichž kolísání se vymyká jakékoliv zákonitosti, nazveme náhodné jevy. Jejich náhodnost spočívá v tom, že nastat mohou, ale nemusí, tj. že nastanou s nějakou pravděpodobností.

Ze zkušenosti je vyvozena významná vlastnost náhodných jevů, kterou při budování matematické teorie používáme k zavedení pojmu náhodného jevu.

Ke každému náhodnému jevu A přísluší reálné číslo $P(A)$, které má tyto vlastnosti:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- při n -násobném opakování pokusu, když je n hodně velké, je prakticky jisté, že podíl m/n , kde m značí počet všech pokusů, při nichž jev A nastal, se jen nepatrně liší od čísla $P(A)$. Této vlastnosti říkáme statistická regularita.

Podíl m/n , který nazveme relativní četnost, kolísá okolo hodnoty pravděpodobnosti $P(A)$. Relativní četnost nám umožňuje odhadnout pravděpodobnost výskytu nějakého jevu empiricky na základě relativních četností. Obecné vyjádření je v zákonu velkých čísel. Uvedeme si alespoň speciální případ tohoto zákona — větu Bernoulliuvu:

Věta: Je-li m počet uskutečnění jevu A v n nezávislých pokusech a p je pravděpodobnost uskutečnění jevu A v každém z těchto n pokusů, potom pro libovolně malé $E > 0$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{m}{n} - p \right| < E \right\} = 1$$

Znamená to tedy, že při velkém počtu pozorování se relativní četnost výskytu určitého jevu jen málo liší od objektivně existující pravděpodobnosti jeho výskytu. Jinými slovy to znamená, že relativní četnost vypočtená z výběru velkého rozsahu, může být považována za přibližný odhad pravděpodobnosti zkoumaného jevu.

- Když se $P(A)$ nepatrně liší od nuly, je prakticky jisté, že při jediném pokusu jev A nastane.

- Když se $P(A)$ nepatrně liší od jedničky, je prakticky jisté, že při jediném pokusu jev A nastane.

- Ke každému náhodnému jevu A přísluší náhodný jev $\bar{A}$, opačný k jevu A , který má tu vlastnost, že o jeho pravděpodobnosti platí $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Dále je třeba, abychom si osvětlili pojem závislosti a nezávislosti náhodných jevů.

Náhodné jevy nazveme vzájemně nezávislými tehdy, jestliže pravděpodobnost kteréhokoli z nich nezávisí na tom, zda nastane nebo nenastane kterýkoliv z ostatních jevů.

Nastane-li situace, kdy např. dva jevy jsou na sobě závislé tak, že jev B ovlivňuje výskyt jevu A , potom pravděpodobnost výskytu jevu A za předpokladu, že nastal jev B , nazýváme podmíněnou pravděpodobností jevu A a značíme ji $P(A/B)$. Tuto podmíněnou pravděpodobnost můžeme interpretovat také tak, že jde o pravděpodobnost, že nastane jev A , když předpokládáme, že jev B již nastal (časová podmíněnost).

Náhodnou proměnnou veličinou nazveme proměnnou veličinu, která nabývá zcela určitou hodnotu s určitou pravděpodobností. Rozeznáváme náhodné proměnné veličiny rozpojitě a spojitě.

Pojem náhodné proměnné veličiny je obdobný s pojmem funkce. Můžeme tedy považovat náhodnou proměnnou veličinu za funkci, která přiřazuje zcela určitou hodnotu s danou pravděpodobností. Náhodnou proměnnou veličinu označujeme ξ . Jednotlivé hodnoty proměnné náhodné veličiny nabývají hodnot $x_1, x_2, \dots, x_n$ a přiřazené pravděpodobnosti $p_1, p_2, \dots, p_n$. Funkci $p(x)$, která udává pravděpodobnost, se kterou náhodná proměnná veličina nabývá jednotlivých hodnot x_i , nazýváme rozdělení pravděpodobnosti.

Při rozpojití náhodné proměnné veličině je rozdělení pravděpodobnosti definováno

$$p(x) = p_i$$

kde p_i je pravděpodobnost, že náhodná proměnná veličina ξ nabude hodnoty x_i .

Při spojití náhodné proměnné veličině je rozdělení pravděpodobnosti definováno hustotou pravděpodobnosti

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq \xi \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Výraz v čitateli udává pravděpodobnost, že hodnota náhodné proměnné veličiny ξ leží v intervalu $(x, x + \Delta x)$.

Zavedeme si ještě další dva pojmy z teorie pravděpodobnosti, kterých budeme potřebovat zejména v dalších kapitolách tohoto kursu.

Pravděpodobnost a posteriori je pravděpodobnost jevu, který již nastal (ptáme se po skutečnosti, která již nastala). Naopak o jevech, které výsledek teprve způsobí, děláme hypotézy — jde o oblast pravděpodobnosti hypotéz. Pravděpodobnost jevu, kterou známe, než jev nastal, a kterou používáme např. k určení pravděpodobnosti hypotézy o nějaké skutečnosti, nazýváme pravděpodobnost a priori.

2. ZPRACOVÁNÍ EMPIRICKY ZJIŠTĚNÝCH DAT

Statistickým souborem rozumíme souhrn všech objektů, na nichž sledujeme určitou vlastnost. Statistický soubor se skládá ze statistických jednotek. Vlastnost, kterou sledujeme na všech jednotkách, se nazývá znak.

Znak dělíme na dvě skupiny:

- a) znak kvalitativní, kdy rozeznáváme jen dvě možnosti, zda a jaký znak má určitý prvek souboru. Nečiníme rozdíl mezi kvantitou znaku (např. dobrý výrobek nebo zmetek);
- b) znak kvantitativní, kdy na prvcích souboru zkoumáme, jak se mění velikost znaku (teplota, průtok, tlak, čas apod.).

Kvantitativní znaky ještě dělíme na:

1. rozpojitý znak — který nabývá jen určitých číselných hodnot (např. jen celá čísla);
2. spojitý znak — který může nabývat nejrůznějších číselných hodnot (např. teplota, tlak apod.).

2.1. Rozdělení četností

Chceme-li sledovat určitý znak na daném statistickém souboru, je nutno získat celou řadu číselných hodnot, kterých uvažovaný znak nabývá na každém prvku souboru. K získání přehledného číselného materiálu data uspořádáme. Činíme to zhuštěním — metodou třídění. Napozorovaná data roztřídíme do několika tříd (intervalů). Všechny hodnoty ve třídě jsou reprezentovány jednou hodnotou, středem intervalu, který nazýváme třídním znakem.

Postup při roztřídění všech pozorovaných hodnot do tříd bude tento:

- a) nejprve určíme třídni interval, tj. šířku tříd, do kterých budeme jednotlivé hodnoty zařazovat,
- b) určíme rozmístění intervalů, tj. hranice tříd nebo jejich středy,
- c) určíme celou stupnici intervalů a roztřídíme do nich všechna pozorování,
- d) sestavíme tabulku, která nám ukazuje celkový počet pozorování v každé třídě.

Pro ujasnění uvedeme, jak najdeme přibližnou hodnotu pro šířku třídního intervalu. Nejprve v naměřených datech najdeme nejvyšší a nejnižší hodnotu. Rozdíl mezi těmito hodnotami podělíme počtem tříd, jaký chceme mít. Počet tříd nelze pevně stanovit, záleží to na variabilitě souboru. V praxi se pohybuje kolem 10–20.

3. MODEL ROZDĚLENÍ ČETNOSTÍ A JEHO VZNIK

S rostoucím rozsahem sledovaného souboru a s rostoucí přesností měření pozorovaných hodnot znaku můžeme zkracovat délku třídních intervalů a při nekonečně velkém rozsahu souboru přejde grafické znázornění četností ve spojitou křivku, která se nazývá modelem rozdělení četností nebo též hustotou pravděpodobnosti. Vznik tohoto modelu je možno odvodit též teoreticky.

Modely rozdělení četností můžeme rozdělit do dvou skupin:

1. rozpojité (např. binomické rozdělení)
2. spojité (např. normální rozdělení)

Při našich dalších úvahách budeme předpokládat normální rozdělení, a proto se s ním blíže seznámíme.

3.1. Normální rozdělení a jeho charakteristiky

Každé rozdělení četností je obvykle charakterizováno dvěma základními parametry, a to střední hodnotou a rozptylem. Základní parametry normálního rozdělení jsou μ (střední hodnota) a rozptyl σ^2 . Odhady těchto parametrů zjistíme vypočtením hodnot aritmetického průměru a rozptylu z empiricky daných hodnot:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Je třeba si ještě připomenout, že polohu rozdělení četností můžeme definovat několika různými způsoby. Nejdůležitější jsou tři charakteristiky: aritmetický průměr, medián a modus. Medián označujeme $\tilde{x}$ a je definován jako prostřední hodnota v souboru, kde všechny hodnoty jsou seřazeny podle velikosti. Modus označujeme $\hat{x}$ a je definován jako taková hodnota x , jejíž pravděpodobnost výskytu je největší.

U normálního rozdělení jsou všechny tři základní parametry polohy dány jednou hodnotou – platí, že $\bar{x} = \tilde{x} = \hat{x}$.

Normální rozdělení zjišťujeme při měření kvalitativního znaku na jednom předmětu. Pokaždé naměříme jinou hodnotu znaku, protože výsledek každého měření závisí na velkém počtu náhodných vlivů, z nichž každý může působit nějakou odchylku od skutečnosti. Tyto odchylky jsou nezávislé a stejně pravděpodobné v obou směrech od skutečné hodnoty. Přitom malé odchylky jsou pravděpodobnější než velké. Protože odchylky jsou způsobeny jen náhodnými vlivy, dostaneme souměrnou křivku modelu rozdělení četností zvonovitého tvaru – frekvenční funkci normálního rozdělení četností.

Frekvenční funkce normálního rozdělení má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{kde } -\infty \leq x \leq +\infty$$

Protože u normálního rozdělení jde o spojitou proměnnou, dostaneme kumulativní distribuční funkci integrací frekvenční funkce přes příslušný obor proměnné x .

Kumulativní distribuční funkce normálního rozdělení má tvar

$$F(a) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Tato funkce nám udává pravděpodobnost, že hodnota sledovaného znaku x nabude některé z hodnot od $-\infty$ do a . Pravděpodobnost, že sledovaný znak nabude hodnoty v intervalu $(-\infty, +\infty)$ je rovna 1.

Pro zjednodušení zavedeme tzv. směrodatnou proměnnou

$$\frac{x - \mu}{\sigma} = u$$

Po této transformaci se změní tvar frekvenční funkce na

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Touto transformací jsme položili počátek souřadnic do průměru, který je pak v bodě $u = 0$, kolem něhož je křivka symetrická. Směrodatná odchylka (i rozptyl) proměnné u je rovna 1. Takto transformované normální rozdělení nazýváme též normalizovaným a značíme je $N(0,1)$.

Kumulativní distribuční funkce transformované proměnné u má tvar

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Hodnoty $F(u)$ jsou tabelovány, takže můžeme pomocí tabulek určit s jakou pravděpodobností bude zjištěná hodnota sledovaného znaku ležet v libovolném intervalu mezi $\pm \infty$.

4. EXPERIMENTÁLNÍ CHYBA

Uvedli jsme, že při opakování pokusů za stejných experimentálních podmínek dostaneme různé výsledky pokusů. Provedeme-li n takových pokusů a jejich výsledky označíme $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$, potom výsledek i -tého pokusu můžeme vyjádřit ve tvaru

$$x_i = \mu + E_i \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kde μ je správný (teoretický) výsledek a E_i experimentální chyba i -tého pokusu. Experimentální chyba vyjadřuje náhodné kolísání výsledků pokusů x_i kolem hodnoty μ . Za předpokladu, že x_i má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, má E_i normální rozdělení $N(0, \sigma^2)$. Rozptyl charakterizuje variabilitu experimentální chyby; čím je rozptyl větší, tím menší je reprodukovatelnost pokusů.

Z výsledků opakování pokusů vypočteme průměrnou hodnotu,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

kteřá je nejlepším odhadem teoretické hodnoty μ . Odhad $\bar{x}$ teoretické hodnoty μ je tím přesnější, čím menší je σ^2 a čím větší je n . Pro závěr o hodnotě μ na základě velikosti $\bar{x}$ potřebujeme však mít určité pravidlo, které by bylo objektivní a které tedy nebude záviset na našem subjektivním úsudku.

5. EXPERIMENT NA JEDNÉ ÚROVNI

Je navržena změna technologie a pro porovnání starého a nového technologického postupu uskutečníme n pokusů s novým technologickým postupem. Sledovanou proměnnou x je např. výnos. Při dosavadní technologii byl průměrný výnos roven μ_0 . Skutečný průměrný výnos při nové technologii je μ . Odhad μ je roven $\bar{x}$, který vypočteme z výsledků n pokusů. Zajímá nás, zda $\mu = \mu_0$ nebo $\mu \neq \mu_0$ a kdy lze považovat rozdíl $\bar{x} - \mu_0$ za tak veliký, že byl

skutečně způsoben změnou technologického postupu a nikoli náhodnými vlivy. Je zřejmé, že rozhodnutí při srovnání obou technologií závisí na rozdílu $\bar{x} - \mu_0$ a na velikosti rozptylu a počtu pokusů. Oba technologické postupy srovnáme pomocí testu významnosti.

Z výsledků pokusů stanovíme nestranný* odhad rozptylu

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right]$$

Použijeme testového kritéria

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$$

Veličina t má za předpokladu, že $\mu = \mu_0$, Studentovo rozdělení o $(n-1)$ stupních volnosti, s nimiž vstupujeme do tabelovaného rozdělení. Popis Studentova rozdělení a postup hledání tabelovaných hodnot — viz (7). Kritickou hodnotu t_α testového kritéria t pro danou hladinu významnosti α nalezneme v tabulce. Je-li $|t| > t_\alpha$, zamítáme hypotézu $\mu = \mu_0$.

Hladina významnosti α je pravděpodobnost, že nějaká náhodná odchylka přesáhne určitou danou hodnotu. Volíme ji zpravidla 0,05 nebo 0,01.

Symbolicky zapíšeme

$$P\{|t| > t_\alpha\} = \alpha$$

Pro dané α stanovíme z tabulky t_α .

Hladina významnosti α je velmi malá. Je-li skutečně $\mu = \mu_0$, je s velkou pravděpodobností $|t|$ menší než t_α . Proto dostaneme-li $|t|$ větší, než je hodnota t_α , učiníme závěr, že $\mu \neq \mu_0$, tj. že nová technologie se liší v průměrném výnosu od dosavadní. Hladina významnosti α udává též pravděpodobnost, že se dopustíme chyby v tom, že učiníme závěr, že $\mu \neq \mu_0$, ačkoli ve skutečnosti $\mu = \mu_0$. Je to tzv. pravděpodobnost chyby prvního druhu. Z tohoto hlediska by bylo tudíž účelné volit α co nejmenší. Snížením hodnoty α se však zvýší pravděpodobnost chyby druhého druhu, která spočívá v tom, že prohlásíme, že $\mu = \mu_0$, ačkoli ve skutečnosti $\mu \neq \mu_0$. Proto se zpravidla volí $\alpha = 0,05$ nebo $\alpha = 0,01$.

Popsaný testem významnosti ověřujeme, zda $\mu = \mu_0$ (testovaná hypotéza**). Je-li $|t| > t_\alpha$, zamítáme hypotézu a říkáme, že rozdíl $\bar{x} - \mu_0$ je statisticky významný. Je-li $|t| < t_\alpha$, je rozdíl $\bar{x} - \mu_0$ statisticky nevýznamný.

Podstata ostatních testů (na více úrovních) je obdobná.

Příklad 1.

$$\bar{x} = 17,4 \quad \mu_0 = 16,0 \quad S = 1,89 \quad n = 10$$

$$t = \frac{17,4 - 16,0}{1,89} \sqrt{10} = 2,34$$

Z tabulky kritických hodnot t -rozdělení pro $\alpha = 0,05$ a 9 stupňů volnosti nalezneme hodnotu $t_{0,05} = 2,26$. Protože $t = 2,34 > 2,26$, je rozdíl $\bar{x} - \mu_0$ na zvolené hladině významnosti statisticky významný.

*) Základní úlohou matematické statistiky je získání nejlepších statistických charakteristik rozdělení na základě výběru. Jedním z požadavků je nestrannost odhadu. Při velkém rozsahu výběru se v praxi strannost odhadu zanedbává. Nejlepším odhadem rozptylu základního souboru je

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Tento odhad není nestranný. Na nestranný jej převedeme vynásobením $\frac{n}{n-1}$.

**) Testování statistických hypotéz je důležitou částí výběrové teorie matematické statistiky. Při testování hypotéz ověřujeme předpoklady o parametrech základního souboru a o typu rozdělení.

6. EXPERIMENTY NA DVOU ÚROVNÍCH

Často se setkáváme s úkolem srovnat průměrné výsledky pokusů, které jsou představovány dvěma úrovněmi určitého faktoru. Označme n_1 počet pokusů na úrovni A_1 a n_2 počet pokusů na úrovni A_2 . Výsledky pokusů pro A_1 jsou $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$, a pro A_2 $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}$.

Jako v předcházející kapitole uvažujeme správné (teoretické) hodnoty μ_1 a μ_2 , které nazýváme též účinky (efekty) úrovně A_1, A_2 . O experimentálních chybách E_{1i} a E_{2i} předpokládáme, že jsou nezávislé náhodné proměnné s rozdělením $N(0, \sigma^2)$. Chceme ověřit hypotézu

$$\mu_1 = \mu_2$$

tj., že efekty úrovně A_1 a A_2 jsou stejné. Pro test významnosti potřebujeme stanovit průměrné výsledky pokusů, jež jsou odhady μ_1 a μ_2 .

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}$$

a nestranné odhady S_1^2 a S_2^2 rozptylu σ^2

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2$$

Testovým kritériem pro test hypotézy $\mu_1 = \mu_2$ je

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$$

$$\text{kde } S^2 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

představuje nestranný odhad rozptylu σ^2 s $(n_1 + n_2 - 2)$ stupni volnosti. Je-li $\mu_1 = \mu_2$, má testové kritérium t -rozdělení o $(n_1 + n_2 - 2)$ stupni volnosti.

Test významnosti se uskuteční jako v předcházejícím testu, a to tak, že absolutní hodnota testového kritéria $|t|$ se pro danou hladinu významnosti α a počet stupňů volnosti porovná s hodnotou t_α z tabulky t -rozdělení.

Je-li $|t| > t_\alpha$, je rozdíl $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ statisticky významný a hypotéza $\mu_1 = \mu_2$ se zamítá.

Tento test významnosti je založen na předpokladu, že výsledky pokusů při obou úrovních mají stejný rozptyl. Hypotéza stejného rozptylu se ověří pomocí testového kritéria F_{**}

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \begin{matrix} \text{(větší)} \\ \text{(menší)} \end{matrix}$$

Hodnota F , vypočtená z výsledků pokusů, se porovná s kritickou hodnotou F_α , kterou pro dané α a příslušné stupně volnosti $(n_1 - 1)$ a $(n_2 - 1)$ nalezneme v tabulce F -rozdělení.

*) viz [7]

Je-li $F > F_{\alpha}$, liší se odhady S_1^2 a S_2^2 významně a kritéria t nelze použít.

Příklad 2.

$$\bar{x}_1 = 82,94 \quad S_1^2 = 25,932 \quad n_1 = 9$$

$$\bar{x}_2 = 79,43 \quad S_2^2 = 22,614 \quad n_2 = 31$$

$$F = \frac{25,932}{22,614} = 1,15 \text{ je menší než hodnota v tabulce } 2,266$$

Použijeme tedy kritéria t :

$$S^2 = \frac{207,453 + 678,430}{38} = 23,313$$

$$t = \frac{82,94 - 79,43}{\sqrt{23,313}} \sqrt{\frac{9 \cdot 31}{40}} = 1,92$$

Z tabulky pro $\alpha = 0,05$ a 38 stupňů volnosti nalezneme hodnotu $t_{0,05} = 2,02$. Jelikož $|t| = 1,92 < 2,02$, je rozdíl $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ na zvolené hladině významnosti nevýznamný.

7. EXPERIMENTY NA VÍCE ÚROVNÍCH — ANALÝZA ROZPTYLU

Podobným způsobem jako pro dvě úrovně je možno srovnávat průměry výsledků pokusů na více úrovních.

Analýza rozptylu umožňuje izolovat a analyzovat zdroje variability zkoumané náhodné veličiny.

7.1. Jednoduché třídění (test rovnosti průměrů p normálních rozdělení se stejným rozptylem).

Problém je tento: je dáno p ($p \geq 2$) úrovní faktoru A : $A_1, A_2, \dots, A_p$ o $n_1, n_2, \dots, n_p$ pozorováních na náhodné veličině y . Předpokládáme, že počet pozorování (pokusů) n_i pro úroveň A_i je náhodným výběrem ze základního souboru, v němž veličina y má normální rozdělení s průměrem μ_i a neznámým rozptylem σ^2 . Máme testovat hypotézu

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_p$$

Výsledky jednotlivých pokusů můžeme uspořádat do tabulky jednoduchého třídění (tab. I).

I.

Úroveň (třída)	Pozorování	Průměr
A_1	$y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n_1}$	$y_{1\cdot}$
A_2	$y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n_2}$	$y_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_p	$y_{p1}, y_{p2}, \dots, y_{pn_p}$	$y_{p\cdot}$

y_{ij} značí výsledek j -tého pokusu na úrovni A_i . Předpokládá se, že veličiny y_{ij} lze vyjádřit ve tvaru

$$y_{ij} = \mu + \mu_i + E_{ij} \quad \begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, p \\ j &= 1, 2, \dots, n_i \end{aligned}$$

kde μ značí obecnou konstantu, μ_i efekt úrovně A_i a E_{ij} experimentální chybu. Vyjádření v tomto tvaru nazýváme modelem jednoduchého experimentu.

Z výsledků pokusu vypočteme průměry pro jednotlivé úrovně

$$y_{i.} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \frac{1}{n_i} Y_{i.}$$

a celkový průměr

$$y_{..} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p Y_{i.} = \frac{1}{n} Y_{..}$$

$$n = \sum_{i=1}^p n_i \quad Y_{i.}, Y_{..} \text{ značí součty, } y_{i.}, y_{..} \text{ značí průměry. Indexy, přes které se}$$

sčítalo, nahrazujeme tečkami.

Z výsledků určíme celkový součet čtverců

$$S = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - y_{..})^2,$$

který lze rozložit na dvě složky

$$S_A = \sum_{i=1}^p n_i (y_{i.} - y_{..})^2$$

$$S_o = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - y_{j.})^2$$

První z nich charakterizuje variabilitu mezi průměry $y_{i.}$ jednotlivých úrovní, druhá variabilitu ve výsledcích opakovaných pokusů při jednotlivých úrovních.

II.

Pramen měnlivosti	Součet čtverců	Stupně volnosti	Průměrný čtverec
$S_A =$	$\sum_{i=1}^p \frac{Y_{i.}^2}{n_i} - \frac{Y_{..}^2}{n}$	$(p-1)$	$\frac{S_A}{p-1}$
$S_o =$	$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^p \frac{Y_{i.}^2}{n_i}$	$(n-p)$	$\frac{S_o}{n-p}$
$S =$	$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{n}$	$(n-1)$	

Jako testového kritéria se používá

$$F = \frac{\frac{S_A}{p-1}}{\frac{S_o}{n-p}}$$

Hodnota F se porovná s kritickou hodnotou F_α pro $(p-1)$ a $(n-p)$ stupně volnosti. Je-li $F > F_\alpha$, liší se průměry $y_{1.}, y_{2.}, \dots, y_{p.}$ od sebe statisticky významně a hypotézu o rovnosti efektů zamítáme. Rozklad celkového součtu čtverců S se vyjadřuje v tabulce analýzy rozptylu (tab. II).

Zpravidla se S_o stanoví jako rozdíl $S_o = S - S_A$. Tento testový postup se nazývá F -testem nebo též testem analýzy rozptylu. F -test je zobecněním Studentova t -testu pro více než dva výběry.

7.2. Analýza rozptylu v případě dvou faktorů (dvojně třídění)

Předpokládejme, že při experimentu pozorování třídíme podle faktorů A a B , přičemž faktor A je dán v r třídách a faktor B v c třídách (úrovních). Pozorování můžeme uspořádat do tabulky, jejíž řádky odpovídají r třídám faktoru A a sloupce c třídám faktoru B (tab. III).

III.

		Faktor B				Součty	Průměry
		B_1	$B_2 \dots$	$B_j \dots$	B_c		
Faktor A	A_1	y_{11}	$y_{12} \dots$	$y_{1j} \dots$	y_{1c}	$Y_{1.}$	$y_{1.}$
	A_2	y_{21}	$y_{22} \dots$	$y_{2j} \dots$	y_{2c}	$Y_{2.}$	$y_{2.}$
	.						
	.						
	A_i	y_{i1}	$y_{i2} \dots$	$y_{ij} \dots$	y_{ic}	$Y_{i.}$	$y_{i.}$
	.						
	A_r	y_{r1}	$y_{r2} \dots$	$y_{rj} \dots$	y_{rc}	$Y_{r.}$	$y_{r.}$
Součty		$Y_{.1}$	$Y_{.2} \dots$	$Y_{.j} \dots$	$Y_{.c}$	$Y_{..}$	
Průměry		$y_{.1}$	$y_{.2} \dots$	$y_{.j} \dots$	$y_{.c}$		$y_{..}$

Pozorování v řádce i a sloupci j je označeno y_{ij} . Předpokládáme, že v každé úrovni je uskutečněno jedno pozorování, takže celkový počet pozorování je roven $n = r \cdot c$. Při analýze vycházíme opět z předpokladu, že y_{ij} jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením o neznámém rozptylu, přičemž pozorování y_{ij} je dáno součtem tří konstant: obecné konstanty μ , efektu μ_i i -té úrovně faktoru A a $\mu_{.j}$ efektu j -té úrovně faktoru B a experimentální chyby E_{ij} .

Celkový součet čtverců odchylek pozorování y_{ij} od celkového průměru rozložíme do tří složek, které vyjadřují:

- variabilitu průměrů úrovně faktoru A (řádkových)
- variabilitu průměrů úrovně faktoru B (sloupcových)
- variabilitu residuální.

Tedy celkový součet čtverců

$$S = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c (y_{ij} - y_{..})^2$$

rozložíme na složky S_A , S_B , a S_o . Rozklad vyjádříme v tabulce ve výpočetním tvaru (tab. IV.)

IV.

Pramen měnlivosti	Součet čtverců	Stupně volnosti	Průměrný čtverec
S_A	$= \frac{1}{c} \sum_{i=1}^r Y^2_{i.} - \frac{Y^2_{..}}{r \cdot c}$	$r - 1$	$\frac{S_A}{r-1}$
S_B	$= \frac{1}{r} \sum_{j=1}^c Y^2_{.j} - \frac{Y^2_{..}}{r \cdot c}$	$c - 1$	$\frac{S_B}{c-1}$
S_o	$= S - (S_A + S_B)$	$(r-1)(c-1)$	$\frac{S_o}{(r-1)(c-1)}$
S	$= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c Y^2_{ij} - \frac{Y^2_{..}}{r \cdot c}$	$rc - 1$	

Faktor A testujeme pomocí kritéria

$$F = \frac{\frac{S_A}{r-1}}{\frac{S_o}{(r-1)(c-1)}}$$

a faktor B

$$F = \frac{\frac{S_B}{c-1}}{\frac{S_o}{(r-1)(c-1)}}$$

Vypočtené hodnoty F porovnáme s tabelovanými hodnotami F_α . Pro tři nebo více faktorů je rozklad celkového součtu čtverců S na složky obdobný případu dvou faktorů. Analýza rozptylu spočívá v tom, že S rozdělíme na složky, které přísluší hlavním efektům.

Příklad 3. Experimentálním měřením jsme získali dva výběry (např. hektarových výnosů):

Výběr 1: 3, 10, 14, 13, 4

Výběr 2: 1, 7, 9, 6, 4

Úkolem je test hypotézy o rovnosti průměrů obou výběrů.

a) Jednoduché třídění — třídíme podle jednoho faktoru A (faktor A představuje výběry)

Úroveň	Pozorování					Součet	Průměr
A_1	3,	10,	14,	13,	4	44	8,8
A_2	1,	7,	9,	6,	4	27	5,4

V. Tabulka analýzy rozptylu (podle tab. II)

Pramen měnlivosti	Součet čtverců	Stupně volnosti	Průměrný čtverec
S_a	$= 533,0 - 504,1 = 28,9$	1	28,9
S_o	$= 673,0 - 533,0 = 140,0$	8	17,5
S	$= 673,0 - 504,1 = 168,9$	9	

Testové kritérium

$$F = \frac{28,9}{17,5} = 1,65$$

Kritická hodnota $F_{0,05}(1,8) = 5,32$; $F = 1,65 < F_{0,05} = 5,32$.

Hektarové výnosy získané 1. a 2. výběrem (mohou to být výnosy dvou druhů těžé plodiny) se od sebe statisticky významně neliší.

b) Dvojné třídění — třídíme podle dvou faktorů A , B (faktor A představuje výběry, faktor B představuje v pořadí nezaměnitelné vzorky).

VI.

Úroveň	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Součet	Průměr
A_1	3	10	14	13	4	44	8,8
A_2	1	7	9	6	4	27	5,4
Součet	4	17	23	19	8	71	
Průměr	2,0	8,5	11,5	9,5	4,0		7,1

VII. Tabulka analýzy rozptylu (podle tab. IV)

Pramen měnlivosti	Součet čtverců	Stupně volnosti	Průměrný čtverec
S_A	$= 533,0 - 504,1 = 28,9$	1	28,9
S_B	$= 629,5 - 504,1 = 125,4$	4	31,35
S_o	$= 168,9 - 154,3 = 14,6$	4	3,65
S	$= 673,0 - 504,1 = 168,9$	9	

Testové kritérium pro faktor A

$$F = \frac{28,9}{3,65} = 7,92$$

Testové kritérium pro faktor B

$$F = \frac{31,35}{3,65} = 8,59$$

Kritická hodnota pro test faktoru A $F_{0,05}(1, 4) = 7,71$; $F = 7,92 > F_{0,05} = 7,71$

Průměry obou výběrů po vyčlenění vlivu faktoru B se statisticky významně liší.

Kritická hodnota pro test faktoru B $F_{0,05}(4, 4) = 6,39$; $F = 8,59 > F_{0,05} = 6,39$

Z testu faktoru B je patrné, že i průměrné hodnoty vzorků se vzájemně statisticky významně liší. Nepřijmeme tudíž hypotézu o homogenosti vzorků.

IV. Vybrané metody matematické statistiky

8. Uspořádání experimentů do znáhodněných bloků a čtverců

Dosud jsme se zabývali převážně otázkami experimentů z hlediska analýzy výsledků pokusů. Nyní si všimneme základních způsobů uspořádání těchto experimentů — teorie plánování pokusů. Zabýváme se experimentem, ve kterém zkoumáme vliv daného faktoru na průměrnou výši určitého znaku. Úkolem statistiky je najít metody pro stanovení odhadu rozptylu, který jsme označili S_0^2 . Tyto metody jsme si ukázali. Avšak v experimentech vedle chyb měření, které jsou náhodné, se setkáváme s dalším druhem chyb, které spočívají v nehomogenosti experimentálního materiálu a které nelze experimentálně kontrolovat. Tato nehomogenost se projevuje tím, že na některé experimentální jednotky určitá úroveň faktoru působí nekontrolovatelným způsobem příznivě, na jiné nepříznivě, takže není možno rozpoznat, zda experimentální výsledek je důsledkem nehomogenosti, nebo je-li důsledkem vlivu úrovně faktoru. Aby však nějaký experiment mohl být zhodnocen, musí být opakován. Opakováním se však role působení systematických chyb ještě zvětšuje. Problém eliminace vlivu nehomogenosti experimentálního materiálu byl rozřešen R. A. Fisherem tzv. znáhodňovacím (randomizačním) procesem, který je základním principem moderního experimentování.

Princip randomizace je tento: Faktory, které nemůžeme experimentálně kontrolovat a které působí systematické chyby ve výsledcích, musíme přinutit k tomu, abychom je mohli kontrolovat statisticky. To znamená, že chceme, aby působily náhodně. K tomu je donutíme tak, že úroveň faktoru přiřadíme experimentálním jednotkám náhodně.

8.1. Metoda znáhodněných bloků

Tato metoda spočívá v tom, že experiment se opakuje ve skupinách, o kterých víme, že tvoří homogenní celek. Tyto skupiny nazýváme bloky. Požadujeme, aby každý blok obsahoval každou úroveň faktoru právě jednou a aby úroveň faktoru byla experimentálním jednotkám uvnitř bloku přiřazena náhodně. Statistickou analýzu provádíme dvojným tříděním (faktor A jsou blohy a faktor B jsou zkoumané úrovně faktoru). Při r -blocích a c -úrovňích faktoru je analýza rozptylu tvaru (tab. VIII.):

VIII.

Pramen mělnivosti	Stupně volnosti
Bloky	$r - 1$
Úrovně faktoru	$c - 1$
Residuální	$(r - 1)(c - 1)$
Celkem	$r \cdot c - 1$

Z tabulky VIII. je patrné, že při znáhodněných blocích se z celkové variability eliminuje variabilita mezi bloky, což je účelem. Příklad na jedno z možných uspořádání do tří bloků: Je dán faktor A na pěti úrovních. Pokus je trojnásobně opakován

Blok 1 A_1 A_3 A_2 A_4 A_5

Blok 2 A_5 A_3 A_1 A_4 A_2

Blok 3 A_1 A_5 A_2 A_3 A_4

Metoda znáhodněných bloků je jednou z nejjednodušších a nejvýhodnějších experimentálních metod.

8.2. Metoda latinských čtverců

Bloky eliminujeme vliv nějakého vedlejšího faktoru, který sice v experimentu nesledujeme, který by však mohl podstatně zkreslit efekt vyšetřovaného faktoru. Někdy je třeba eliminovat vliv dvou nebo více takovýchto vedlejších faktorů. V těchto případech se používá uspořádání experimentů do latinských, popřípadě řecko-latinských čtverců. Těchto uspořádání lze použít v případě, že vedlejší faktory jsou uvažovány na stejném počtu úrovních jako vyšetřovaný faktor, jehož efekt experimentem vyšetřujeme. Těto metody se používá při menším počtu úrovních.

Uspořádání do latinského čtverce uvažuje vedle faktoru A na úrovních $A_1, A_2, \dots, A_p$, další dva faktory, které se označují jako „řádky“ a „sloupce“.

Uvažujeme experiment se čtyřmi úrovněmi A . Při metodě latinského čtverce se tyto úrovně rozmístí náhodně do čtyř bloků, čímž vznikne čtvercové schéma o čtyřech řádcích a čtyřech sloupcích. Toto schéma vyhovuje podmínce, že každá úroveň se v každém řádku a sloupci vyskytuje jen jednou. Jeden z možných latinských čtverců je

A_1	A_2	A_3	A_4
A_2	A_1	A_4	A_3
A_3	A_4	A_1	A_2
A_4	A_3	A_2	A_1

Latinské čtverce jsou tabelovány. Ukázali jsme si tzv. standardní čtverec, kde první řádek a sloupec obsahuje úroveň A_i seřazené vzestupně podle indexu. Řádky a sloupce lze náhodně zaměnit a též jednotlivé úrovně faktoru A symbolům A_1, A_2, A_3, A_4 lze přiřadit náhodně. Pro analýzu rozptylu experimentu uspořádaného do latinského čtverce o straně p je třeba vypočítat:

$$\text{průměry řádků} \quad y_{i.} = \frac{1}{p} Y_{i.}$$

$$\text{průměry výsledků} \quad y_{(L)} = \frac{1}{p} Y_{(L)} \text{ pro jednotlivé úrovně faktoru } A,$$

$$\text{celkový průměr} \quad y_{..} = \frac{1}{p^2} Y_{..}$$

$$\text{a průměr sloupců} \quad y_{.j} = \frac{1}{p} Y_{.j}$$

$$\text{Rozklad celkového součtu čtverců } S = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (y_{ij(L)} - y_{..})^2 \text{ si ukážeme v tabulce IX.}$$

Rozklad vyjádříme ve výpočetním tvaru.

Testujeme: rovnost řádkových efektů, sloupcových efektů, efektů úrovně faktoru A obvyklým způsobem pomocí kritéria F .

Poznámka: Součty výsledků pro jednotlivé úrovně $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(L)}$ dostaneme tak, že sečteme výsledky vždy pro určitou úroveň — výsledky příslušné úrovně tedy po experimentu musíme vybrat ze čtverce.

Příklad 4. Máme za úkol zjistit účinnost 7 druhů hnojení na výši sklizně brambor. Pokusný pozemek je ve tvaru čtverce (nebo obdélníka). Rozdělíme jej do 49 stejně velkých dílců, které jsou uspořádány do 7 řádek a 7 sloupců. Rozvržení experimentu podle latinského čtverce vyrovnává vlivy rozdílné úrodnosti jednotlivých dílců.

Označíme-li 7 druhů hnojení $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ a použijeme-li tohoto uspořádání latinského čtverce:

IX.

Pramen měnlivosti	Součet čtverců	Stupně volnosti	Průměrný čtverec
$S_{\text{Řádky}}$	$= \frac{\sum_{i=1}^p Y_{i.}^2}{p} - \frac{Y_{..}^2}{p^2}$	$p - 1$	$\frac{S_{\text{Ř}}}{p - 1}$
S_{Sloupce}	$= \frac{\sum_{j=1}^p Y_{.j}^2}{p} - \frac{Y_{..}^2}{p^2}$	$p - 1$	$\frac{S_S}{p - 1}$
S_A	$= \frac{\sum_{L=1}^p Y_{(L)}^2}{p} - \frac{Y_{..}^2}{p^2}$	$p - 1$	$\frac{S_A}{p - 1}$
S_o	$= S - (S_{\text{Ř}} + S_S + S_A)$	$(p - 1)(p - 2)$	$\frac{S_o}{(p - 1)(p - 2)}$
S	$= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{p^2}$	$p^2 - 1$	

A_3	A_2	A_1	A_4	A_5	A_6	A_7
A_4	A_1	A_6	A_3	A_2	A_7	A_5
A_2	A_3	A_4	A_1	A_7	A_5	A_6
A_5	A_4	A_7	A_6	A_3	A_2	A_1
A_1	A_5	A_2	A_7	A_6	A_3	A_4
A_6	A_7	A_5	A_2	A_4	A_1	A_3
A_7	A_6	A_3	A_5	A_1	A_4	A_2

vidíme, že např. sklizeň brambor s použitím hnojení A_1 bude dána součtem ze 7 dílců, z nichž každý leží v jednom řádku a v jednom sloupci.

Experimentální data uvedeme rovněž v uspořádání latinského čtverce. Sklizeň z dílce, který má určitou plochu, je vyjádřena v kilogramech (tab. X.).

Výpočet analýzy rozptylu je v tabulce XI.

Ke zjištění účinnosti 7 druhů hnojení na výši sklizně brambor použijeme test významnosti

$$F = \frac{1936,0}{634,5} = 3,05$$

Kritická hodnota pro test faktoru účinnosti hnojení (A)

$$F_{0,05}(6,30) = 2,42$$

$$F = 3,05 > F_{0,05} = 2,42$$

Účinnost 7 druhů hnojení na výši sklizně brambor je prokázána. Hypotézu, že není rozdíl mezi druhy hnojení, zamítáme.

X.

	1	2	3	4	5	6	7	$Y_{i.}$
1	A_3 344	A_2 428	A_1 423	A_4 432	A_5 449	A_6 449	A_7 410	2 935
2	A_4 367	A_1 430	A_6 443	A_3 387	A_2 447	A_7 426	A_5 372	2 872
3	A_2 317	A_3 389	A_4 425	A_1 389	A_7 408	A_5 397	A_6 384	2 709
4	A_5 303	A_4 393	A_7 442	A_6 427	A_3 386	A_2 358	A_1 342	2 651
5	A_1 291	A_5 423	A_2 412	A_7 392	A_6 364	A_3 341	A_4 333	2 556
6	A_6 261	A_7 374	A_5 398	A_2 347	A_4 323	A_1 284	A_3 273	2 260
7	A_7 258	A_6 376	A_3 404	A_5 317	A_1 234	A_4 250	A_2 233	2 072
$Y_{.j}$	2141	2813	2947	2691	2611	2505	2347	$Y_{..} =$ 18 055

$$\sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 y_{ij}^2 (L) = 6,833.209$$

 Součty výsledků pro jednotlivé druhy hnojení $Y_{(1)}, \dots, Y_{(7)}$ jsou:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
$Y_{(L)}$	2393	2542	2524	2523	2659	2704	2710

XI.

Pramen měnlivosti	Součet čtverců	Stupeň volnosti	Průměrný čtverec
$S_{\text{Řádky}}$	$\frac{2935^2 + \dots + 2072^2}{7} - \frac{18055^2}{7^2} = 84\,858,2$	6	14 143,0
S_{Sloupce}	$\frac{2141^2 + \dots + 2347^2}{7} - \frac{18055^2}{7^2} = 64\,984,5$	6	10 830,8
S_A	$\frac{2393^2 + \dots + 2710^2}{7} - \frac{18055^2}{7^2} = 11\,615,9$	6	1 936,0
S_o	$S - (S_{\text{Ř}} + S_{\text{S}} + S_A) = 19\,035,6$	30	634,5
S	$6\,833\,209 - \frac{18055^2}{7^2} = 180\,494,2$	48	

Rozšířením latinského čtverce je řecko-latinský čtverec, který vznikne složením dvou latinských čtverců. Má tu vlastnost, že je latinským čtvercem s ohledem na faktor A , latinským čtvercem s ohledem na faktor B , a že každá kombinace úrovní faktorů A a B se vyskytuje právě jednou. Analýza rozptylu experimentu uspořádaného do řecko-latinského čtverce se uskuteční obdobným způsobem jako analýza rozptylu latinského čtverce.

Poznamenejme si ještě, že metoda latinského čtverce je důležitá tam, kde se uvnitř bloků mohou vyskytnout systematické trendy. Jestliže v latinském čtverci řádky představují bloky, potom sloupce udávají pořadí úrovní uvnitř bloků a metoda latinského čtverce vliv tohoto pořadí eliminuje.

Mezi znáhodňovací procesy řadíme též tzv. faktoriální experimenty, při nichž se současně vyšetřuje vliv několika faktorů, z nichž každý je dán alespoň na dvou úrovních.

Uspořádání do bloků nebo do čtverců je možné použít v případě, že interakce vyšetřovaných faktorů neexistují nebo jsou zanedbatelné. V zemědělském výzkumu se však častěji setkáváme s případy, kdy faktory nepůsobí na výsledky pokusů nezávisle na sobě, ale jsou v interakci. Proto daleko větší význam mají experimenty, pomocí nichž je možné vyhodnotit vedle hlavních efektů těchto faktorů též jejich interakce. Tomuto požadavku vyhovují faktoriální experimenty, při nichž se uskuteční pokusy pro všechny kombinace úrovní uvažovaných faktorů.

Počet úrovní se volí buď stejný (nejčastěji 2 nebo 3 úrovně), nebo různý. V případě stejného počtu úrovní pro každý faktor máme faktoriální experiment typu 2^n , 3^n apod. Faktoriální experimenty můžeme uskutečnit s jedním nebo několika opakováními.

8.3. Faktoriální experiment 2^n

Nejjednodušší faktoriální experiment je takový, v němž je každý faktor uvažován na dvou úrovních, tj. 2^n . K tomuto experimentu je třeba malý počet pokusů a dá se snadno a rychle vyhodnotit. Uvažujeme případ dvou faktorů A a B . Každý faktor nechť je na dvou úrovních ($n = 2$).

Faktor A má nižší úroveň A_1 , vyšší úroveň A_2 . Podobně faktor B má nižší úroveň B_1 a vyšší úroveň B_2 . Pro přehlednější označení použijeme této symboliky: nižší úroveň faktorů označíme jako 1 a vyšší úrovně malými písmeny příslušného faktoru. To znamená, že $A_1 = 1$, $A_2 = a$, $B_1 = 1$, $B_2 = b$. Dostaneme $2^2 = 4$ kombinace úrovní: (1), a , b , ab . Postup je zřejmý z tabulky

XII.

Úroveň faktoru A	Úroveň faktoru B	
	B_1	B_2
A_1	$A_1B_1 = (1)$	$A_1B_2 = b$
A_2	$A_2B_1 = a$	$A_2B_2 = ab$

Nyní určíme efekt faktoru A pro každou z úrovní faktoru B . Pro B_1 je dán rozdíl výsledků na úrovních A_2 a A_1 , tj. $a - (1)$, pro B_2 rozdílem $ab - b$. Hlavní efekt faktoru A je pak roven průměru dvou rozdílů.

$$A = \frac{1}{2} \left\{ a - (1) + ab - b \right\} = \frac{1}{2} \left\{ - (1) + a - b + ab \right\}$$

Podobně hlavní efekt faktoru B je

$$B = \frac{1}{2} \left\{ b - (1) + ab - a \right\} = \frac{1}{2} \left\{ - (1) - a + b + ab \right\}$$

V případě, že faktory A a B působí nezávisle na výsledek pokusů y , musí být rozdíly $(a - (1))$ a $(ab - b)$ stejné, podobně $(b - (1))$ a $(ab - a)$. Není-li tomu tak, nepůsobí faktory A a B nezávisle na sobě, ale existují jejich interakce. Interakci definujeme proto jako

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{2} \left\{ (ab - b) - (a - (1)) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ (ab - a) - (b - (1)) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ + (1) - a - b + ab \right\} \end{aligned}$$

Získáme ji z rozdílu mezi efektem faktoru A při úrovni B_2 a efektem faktoru A při úrovni B_1 a naopak.

Vyjádření hlavních efektů a interakce pomocí jednotlivých výsledků kombinací úrovní uvádí tabulka XIII.

XIII.

	(1)	a	b	ab	Dělitel
A	—	+	—	+	2
B	—	—	+	+	2
AB	+	—	—	+	2

Tabulka XIII. je zajímavá v tom, že součet koeficientů v každém řádku a skalární součin koeficientů každé dvojice řádků je nulový. Vyhovuje tím teoretickým předpokladům, jež jsou na tuto metodu kladeny.

Obsahuje-li experiment $r \geq 1$ opakování pokusů a označíme-li $[1]$, $[a]$, $[b]$, $[ab]$ součet experimentálních výsledků obdržných při jednotlivých kombinacích, dostanou se odhady hlavních efektů a interakcí pomocí uvedené tabulky, kde teoretické výsledky (1), a , b , ab se nahradí experimentálními výsledky $[1]$, $[a]$, $[b]$, $[ab]$.

Dělitel pak bude $2r$. Odhady hlavních efektů a interakcí jsou

$$\hat{A} = \frac{1}{2r} \left\{ - [1] + [a] - [b] + [ab] \right\} = \frac{1}{2r} [A]$$

$$\hat{B} = \frac{1}{2r} \left\{ - [1] - [a] + [b] + [ab] \right\} = \frac{1}{2r} [B]$$

$$\hat{AB} = \frac{1}{2r} \left\{ + [1] - [a] - [b] + [ab] \right\} = \frac{1}{2r} [AB]$$

Faktoriální experiment 2^2 se vyhodnocuje analýzou rozptylu. Pro výpočet je tato tabulka (tab. XIV.).

Testujeme pomocí kritéria F s příslušnými stupni volnosti.

XIV.

Pramen měnlivosti	Součet čtverců	Stupně volnosti	Průměrný čtverec
S_A	$= \frac{1}{4r} [A]^2$	1	S_A
S_B	$= \frac{1}{4r} [B]^2$	1	S_B
S_{AB}	$= \frac{1}{4r} [AB]^2$	1	S_{AB}
S_o	$= S - (S_A + S_B + S_{AB})$	$4(r-1)$	$\frac{S_o}{4(r-1)}$
S	$= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^r y_{ij}^2 - \frac{Y^2}{r^2}$	$4r - 1$	

Příklad 5. Uvažujme dvě různé doby měření (faktor A) a dvě různé teploty (faktor B). Pozorovanou proměnnou je biologická ztráta (určité látky). Faktory uvažujeme na těchto úrovních:

faktor A : $A_1 = 2'$

$A_2 = 5'$

faktor B : $B_1 = 90^\circ F$

$B_2 = 140^\circ F$

Kombinace úrovní jsou tyto:

(1) $= A_1 B_1 (2', 90^\circ F)$

$ab = A_2 B_1 (5', 90^\circ F)$

$b = A_1 B_2 (2', 140^\circ F)$

$ab = A_2 B_2 (5', 140^\circ F)$

Pro každou kombinaci úrovní byly uskutečněny čtyři pokusy ($r = 4$) (tab. XV.).

XV.

(1)	a	b	ab
2,5	2,8	3,2	4,2
3,6	2,1	2,9	3,8
2,7	3,3	3,4	3,6
3,1	2,4	2,7	3,3

Součty: $[1] = 11,9$ $[a] = 10,6$ $[b] = 12,2$ $[ab] = 14,9$

Vypočteme

$$[A] = -11,9 + 10,6 - 12,2 + 14,9 = 1,4$$

$$[B] = -11,9 - 10,6 + 12,2 + 14,9 = 4,6$$

$$[AB] = +11,9 - 10,6 - 12,2 + 14,9 = 4,0$$

$$Y.. = 49,6 \sum_i \sum_j y_{ij}^2 = 158,44$$

XVI. Tabulka analýzy rozptylu (podle tab. XIV)

S_A	= 0,1225	1	0,1225
S_B	= 1,3225	1	1,3225
S_{AB}	= 1,0000	1	1,0000
S_o	= 2,2350	12	0,1862
S	= 4,6800	15	

Z tabulky F — rozdělení nalezneme $F_{0,05}(1,12) = 4,747$.

Podíly F pro B a AB tuto tabulkovou hodnotu převyšují.

Zhodnocení výsledků: Pro oba faktory A i B změna nižší úrovně na vyšší přináší vzrůst v biologické ztrátě. Přitom pro faktor A je tento vzrůst statisticky nevýznamný, zatímco změnou teploty z $90^\circ F$ na $140^\circ F$ se zvýší biologická ztráta statisticky významně. Významnost interakce je způsobena tím, že zatímco pro teplotu $90^\circ F$ dochází při změně doby ze 2' na 5' k poklesu biologické ztráty, je tomu při teplotě $140^\circ F$ naopak.

Podobně se postupuje při faktoriálních experimentech typu 2^n pro $n \geq 3$. Hlavní efekty a interakce se vyjádří obdobným způsobem jako pro $n = 2$. Stačí tedy určit znaménka pro hlavní efekty faktorů a jejich interakce. Uvedeme tabulku pro experiment 2^3 (tab. XVII.)

XVII.

	(1)	a	b	ab	c	ac	bc	abc	Dělitel
A	—	+	—	+	—	+	—	+	4
B	—	—	+	+	—	—	+	+	4
AB	+	—	—	+	+	—	—	+	4
C	—	—	—	—	+	+	+	+	4
AC	+	—	+	—	—	+	—	+	4
BC	+	+	—	—	—	—	+	+	4
ABC	—	+	+	—	+	—	—	+	4

Ve výkladu jsme se omezili jen na jednodušší problémy. Ve faktoriálních experimentech lze různým způsobem slučovat interakce, a to částečně i úplně, a lze používat také tzv. zkrácených faktoriálních experimentů, u nichž lze snížit rozsah pokusů.

9. Korelační a regresní analýza

Při rozboru např. výrobních procesů se setkáváme s problémem určit stupeň vázanost a v matematické formě vyjádřit vztahy mezi dvěma nebo více proměnnými.

K měření vázanosti (těsnosti) mezi dvěma nebo více proměnnými používáme koeficientu korelace. Tento vztah, jímž se zabývá teorie korelace, vymezuje vázanost mezi dvěma nebo více proměnnými, kterou nacházíme tehdy, když se s měnicími hodnotami jedné proměnné mění rozdělení četností druhé proměnné. Za touto korelační vázaností se ovšem může skrývat vztah funkcionální. Řešení těchto vztahů patří do oboru vyrovnávacího počtu a jedná o nich teorie chyb. Naproti tomu teorie korelace řeší úkol, kdy mezi statistickými proměnnými není funkcionální vztah. Řekli jsme si, že k měření těsnosti vztahů mezi dvěma nebo více proměnnými používáme koeficientu korelace. O těsnosti vztahu ze znalosti jen koeficientu korelace v daném případě nemůžeme vyvodit správné úsudky, neznáme-li korelační

funkci. Tento problém řeší teorie regrese. Budeme předpokládat, že vztahy mezi jednotlivými proměnnými jsou lineární, tzn. že je můžeme vyjádřit ve formě rovnice přímky, roviny nebo nadroviny. Toto zjednodušení činíme hlavně proto, že většina případů nelineárních závislostí lze transformacemi převést na závislosti lineární.

Například závislost

$$y = a \cdot b^x$$

lze logaritmováním převést na tvar

$$\log y = \log a + x \cdot \log b$$

a tím dostáváme lineární závislost.

V případě, že závislost je dána ve tvaru polynomu n -tého stupně

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n,$$

lze ji pomocí transformací $x = x_1, x^2 = x_2, \dots, x^n = x_n$ převést na n -násobný lineární tvar

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n$$

a můžeme ji řešit pomocí mnohonásobné korelační a regresní analýzy.

9.1. Korelace

Problémem je určit nějakou charakteristiku těsnosti mezi dvěma nebo více proměnnými. Budeme předpokládat, že tyto proměnné mají normální rozdělení. Korelace se projevuje tím, že při změnách kvantitativních hodnot jedné proměnné se mění pravděpodobnost výskytu různých kvantitativních hodnot druhé proměnné. Tedy korelace spočívá v určitých relacích mezi pravděpodobnostmi jevů a projevuje se hromadně.

9.1.1. Jednoduchý korelační koeficient

(měříme těsnost mezi dvěma proměnnými x, y) vypočítáme podle vzorce, který jsme algebraicky upravili na vhodný tvar

$$r_{xy} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \left[n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}}$$

V případě malého počtu pozorování zpracujeme výpočet přímo. V případě většího počtu pozorování počítáme korelační koeficient z hodnot roztríděných do tříd a zavádíme nový počátek pro obě proměnné.

Koeficient korelace má tu vlastnost, že v případě, kdy závislost mezi sledovanými proměnnými neexistuje, je hodnota koeficientu korelace blízká 0; naopak jde-li o kladnou lineární závislost, je blízká 1, o zápornou lineární závislost, pak je blízká hodnotě -1 (při záporné závislosti s rostoucími hodnotami jedné proměnné lineárně klesají hodnoty druhé proměnné).

9.1.1.1. Koeficient determinace

Druhou mocninu korelačního koeficientu

$$d = r_{xy}^2$$

nazýváme koeficientem determinace. Udává nám podíl vlivu jedné proměnné na druhou proměnnou. $100 \cdot r_{xy}^2$ nám přibližně udává procento změn v proměnné y , které bylo způsobeno změnami hodnot proměnné x .

Příklad na výpočet jednoduchého koeficientu korelace a determinace je uveden na závěr odstavce 9.

9.1.2. Koeficient mnohonásobné korelace

Mnohonásobný korelační koeficient vyjadřuje stupeň těsnosti vztahu mezi proměnnou y a mezi nezávisle proměnnými $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Při definování koeficientu mnohonásobné korelace budeme předpokládat, že závislost mezi proměnnou y a proměnnými $x_1, x_2, \dots, x_n$ je dána rovnicí regresní nadroviny:

$$Y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n$$

Koeficient mnohonásobné korelace lze počítat různými způsoby (přesně i aproximativně). Výpočty mnohonásobné korelace jsou velmi pracné a proto je zpracováváme ve většině případů na samočinném počítači. Mnohonásobný korelační koeficient vypočítáváme pomocí rozptylu závisle proměnné y kolem proložené regresní nadroviny a celkového rozptylu hodnot y nebo tak, že jeho hodnotu vyjádříme tzv. parciálními korelačními koeficienty. Ukážeme si způsob výpočtu pomocí tzv. korelačního determinantu P , který je názorný, využívá již vypočítaných jednoduchých koeficientů. Hodí se zejména při menším počtu proměnných, kdy výpočet determinantů není ještě tak pracný.

Obecně závislost mezi závisle proměnnou a n nezávisle proměnnými vyjádříme

$$r_{y \cdot x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt{1 - \frac{P}{P_{11}}},$$

kde

$$P = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} & \dots & r_{yx_n} \\ r_{x_1y} & 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_n} \\ r_{x_2y} & r_{x_2x_1} & 1 & \dots & r_{x_2x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_ny} & r_{x_nx_1} & r_{x_nx_2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

a P_{11} je algebraický doplněk*) determinantu P k prvku r_{yy} . Je zřejmé, že platí $r_{xy} = r_{yx}$; $r_{x_1x_2} = r_{x_2x_1}$ apod.

Je-li $n = 2$, potom

$$\begin{aligned} r_{y \cdot x_1 x_2} &= \sqrt{1 - \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} \\ r_{x_1y} & 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_2y} & r_{x_2x_1} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_2x_1} & 1 \end{vmatrix}}} = \quad (a) \\ &= \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2 r_{yx_1} r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}} \end{aligned}$$

9.1.2.1. Koeficient mnohonásobné determinace

má stejný význam jako v případě závislosti mezi dvěma proměnnými.

9.2. Regrese

V podstatě jde o analytické vyjádření závislosti mezi dvěma nebo více proměnnými pomocí rovnice, která představuje geometrický útvar. Omezíme se na lineární závislosti, které vyjadřujeme pomocí rovnic přímky, roviny a nadroviny. Regresní funkce, které nemůžeme transformací převést na lineární funkce, vyjadřujeme aproximativně.

*) viz kapitola II, základy lineární algebry, odstavec 1

Vztahy pro výpočet parametrů rovnic přímky, roviny a nadroviny odvozujeme metodou nejmenšího součtu čtverců odchylek. Tato metoda spočívá v požadavku, aby součet čtverců odchylek skutečně pozorovaných hodnot závisle proměnné y_i od hodnot Y_i odhadnutých z regresní rovnice na základě znalosti hodnot nezávisle proměnných byl minimální

$$I = \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2 = \text{minimum},$$

kde

$$Y_i = a + bx_i$$

nebo

$$Y_i = a + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \dots + b_n x_{ni}$$

Uskutečnime-li parciální derivace funkce I podle parametrů $a, b_1, \dots, b_n$ a položíme-li je rovny nule, dostaneme soustavu $(n+1)$ normálních rovnic. Řešením této soustavy dostaneme hodnoty parametrů $a, b_1, b_2, \dots, b_n$, které nazýváme parciální regresní koeficienty. Je to vlastně známá úloha hledání minima funkce.

Význam regresního koeficientu b spočívá v tom, že udává, o kolik vzroste v průměru závisle proměnná y , zvýší-li se nezávisle proměnná o jednotku. Při mnohonásobné regresi interpretujeme význam regresních koeficientů tak, že regresní koeficient b_i udává, o kolik se změní závisle proměnná y , zvýšíme-li nezávisle proměnnou x_i o jednotku, přičemž ostatní nezávisle proměnné zůstávají konstantní.

Na příkladě ukážeme výpočet regresních koeficientů pro dvě nezávisle proměnné. Pro jednu nezávisle proměnnou postupujeme obdobně.

Příklad 6. Mějme

$$Y_i = a + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i},$$

$$I = \sum_{i=1}^n (y_i - a - b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i})^2 = \text{minimum}$$

$$\frac{\partial I}{\partial a} = 0 \quad \frac{\partial I}{\partial b_1} = 0 \quad \frac{\partial I}{\partial b_2} = 0$$

Po úpravě dostaneme soustavu normálních rovnic tvaru

$$\begin{aligned} na + b_1 \sum x_{1i} + b_2 \sum x_{2i} &= \sum y_i \\ a \sum x_{1i} + b_1 \sum x_{1i}^2 + b_2 \sum x_{1i} x_{2i} &= \sum x_{1i} y_i \\ a \sum x_{2i} + b_1 \sum x_{1i} x_{2i} + b_2 \sum x_{2i}^2 &= \sum x_{2i} y_i \end{aligned} \quad (1)$$

Řešením těchto rovnic obvyklým způsobem (např. použitím determinantů) dostaneme hodnoty parametrů a, b_1, b_2 . Při numerickém výpočtu můžeme také vycházet z regresní rovnice, kterou vyjádříme v odchylkách proměnných od jejich aritmetických průměrů:

$$Y_i - \bar{Y} = b_1 (x_{1i} - \bar{x}_1) + b_2 (x_{2i} - \bar{x}_2),$$

kde:

$$a = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 = \frac{1}{n} (\sum y_i - b_1 \sum x_{1i} - b_2 \sum x_{2i})$$

Opět použijeme metody nejmenšího součtu čtverců odchylek a dostaneme již jen dvě rovnice o dvou neznámých b_1, b_2 . Pro stručnost a přehlednost zápisu zavedeme toto označení:

$$\begin{aligned}
 (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 &= S(x_1^2) \\
 (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 &= S(x_2^2) \\
 (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) &= S(x_1x_2) \\
 (x_{1i} - \bar{x}_1)(y_i - \bar{y}) &= S(x_1y) \text{ apod.}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Redukovanou soustavu normálních rovnic

$$\begin{aligned}
 b_1 S(x_1^2) + b_2 S(x_1x_2) &= S(x_1y) \\
 b_1 S(x_1x_2) + b_2 S(x_2^2) &= S(x_2y)
 \end{aligned} \tag{3}$$

řešíme opět obvyklým způsobem. Numerický výpočet odchylek od aritmetických průměrů uskutečníme takto:

$$\begin{aligned}
 S(x_1^2) &= \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 = \sum x_{1i}^2 - \frac{(\sum x_{1i})^2}{n} \\
 S(x_1x_2) &= \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) = \sum x_{1i}x_{2i} - \frac{\sum x_{1i} \sum x_{2i}}{n} \text{ apod.}
 \end{aligned}$$

Při použití odchylek od aritmetického průměru si usnadňujeme řešení normálních rovnic (snižujeme stupeň determinantu), na druhé straně vypočítáváme pracnější odchylky od aritmetického průměru.

Soustavy normálních rovnic lze řešit několika metodami numericky velmi pracnými, což se v současné době úspěšně řeší na samočinných počítačích.

Příklad 7. Předpokládejme, že závisle proměnná y je hektarový výnos pšenice v q, nezávisle proměnná x_1, x_2 jsou živiny druhu A, B v hnojivu. Účelem experimentu je zjistit závislost hektarového výnosu na množství jednotlivých živin. Měření bylo uskutečněno na 10 náhodně vybraných pozemcích. Naměřené hodnoty:

y_i	x_{1i}	x_{2i}
22,3	1,1	1,2
22,3	1,4	1,1
29,2	1,7	2,0
27,0	1,7	1,8
28,5	1,8	1,8
30,4	1,8	1,9
31,1	1,9	2,0
31,4	2,0	2,1
32,8	2,3	2,5
34,0	2,5	2,4

Řešení: Naměřené hodnoty proložíme lineární regresní rovnicí $Y = a + b_1x_1 + b_2x_2$ metodou nejmenších čtverců a vypočítáme z nich koeficient mnohonásobné korelace metodou korelačního determinantu P . Nejprve vypočteme

$$\begin{aligned}
 \sum x_{1i} &= 18,2 & \sum x_{2i} &= 18,8 & \sum y_i &= 289,0 \\
 \sum x_{1i}^2 &= 34,58 & \sum x_{2i}^2 &= 37,16 & \sum x_{1i}x_{2i} &= 35,73 \\
 \sum x_{1i}y_i &= 539,64 & \sum x_{2i}y_i &= 559,09 & \sum y_i^2 &= 8497,64
 \end{aligned}$$

a dosadíme do soustavy normálních rovnic (1)

$$\begin{aligned}
 a \cdot 10 + b_1 18,2 + b_2 18,8 &= 289,0 \\
 a 18,2 + b_1 34,58 + b_2 35,73 &= 539,64 \\
 a 18,8 + b_1 35,73 + b_2 37,16 &= 559,09
 \end{aligned}$$

Řešením dostáváme hodnoty parametrů

$$a = 11,91 \quad b_1 = 2,64 \quad b_2 = 6,48$$

Vyjádříme-li regresní rovnici v odchylkách proměnných od jejich aritmetických průměrů, vypočteme podle (2):

$$S(x_1^2) = 34,58 - 33,12 = 1,46$$

$$S(x_1x_2) = 35,73 - 34,22 = 1,51$$

$$S(x_1y) = 539,64 - 525,98 = 13,66$$

$$S(x_2^2) = 37,16 - 35,34 = 1,82$$

$$S(x_2y) = 559,09 - 543,32 = 15,77$$

a dosadíme do soustavy normálních rovnic (3)

$$b_1 \cdot 1,46 + b_2 \cdot 1,51 = 13,66$$

$$b_1 \cdot 1,51 + b_2 \cdot 1,82 = 15,77$$

Řešením této soustavy dostaneme hodnoty parametrů

$$b_1 = 2,78 \quad b_2 = 6,36$$

Dále vypočteme parametr $a = 11,88$.

Poznámka. Parametry a , b_1 , b_2 , vypočtené oběma metodami, se od sebe nepatrně liší. Je to způsobeno zaokrouhlováním výpočtů determinantů, které jsou u obou metod různých stupňů.

K výpočtu koeficientu mnohonásobné korelace metodou korelačního determinantu je třeba nejprve stanovit jednoduché koeficienty korelace, které vypočteme podle vzorce ad 9.1.1.

$$r_{x_1y} = 0,941 \quad r_{x_2y} = 0,972 \quad r_{x_1x_2} = 0,933$$

Dosadíme-li do vzorce (a), vypočteme

$$r_{y \cdot x_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{0,005986}{0,129511}} = 0,976$$

Na základě výsledků můžeme vyvodit tyto závěry:

1. Na podkladě $100 \cdot r^2_{x_1y} = 88,5$ a $100 \cdot r^2_{x_2y} = 94,5$ lze tvrdit, že 88,5 % proměnlivosti v průměrném hektarovém výnosu pšenice bylo způsobeno počtem živin druhu A v hnojení; 94,5 % proměnlivosti v průměrném hektarovém výnosu pšenice bylo způsobeno počtem živin druhu B.
2. Společný vliv obou druhů živin vysvětluje přibližně 95,2 % proměnlivosti výnosu pšenice. Zbývající 4,8 % přičteme vlivu ostatních faktorů, které nebyly do analýzy zahrnuty.
3. Budeme-li obsah živin A v hnojení zvětšovat o jednotku, můžeme očekávat vzrůst hektarového výnosu o 2,78 q pšenice. Při zvětšení obsahu živin B o jednotku můžeme očekávat vzrůst hektarového výnosu o 6,36 q. Tímto způsobem můžeme pokračovat v ověřovacích pokusech.

Literatura

1. Janko J.: Jak vytváří statistika obrazy světa a života, díl I. a II., JČSMF, Praha 1948 —
2. Fisher R. A.: Statistical Methods for Research Workers. Oliver and Boyd, Londýn 1954 —
3. Davies O. L.: The Design and Analysis of Industrial Experiments. Oliver and Boyd, Londýn 1960 —
4. Fischer O.: Analýza rozptylu. SPN, Praha 1956 (učební text.) —
5. Myslivec V.: Statistické metody zemědělského a lesnického výzkumnictví. ČSAZV Praha 1957 —
6. Snedecor G. W.: Statistical Methods Applied to Experiments in Agriculture and Biology, 1948 —
7. Janko J.: Statistické tabulky. ČSAV, Praha 1958.

V. Matematické programování

V této kapitole se vynasnažíme podat přístupnou formou přehled o různých druzích matematického programování, které přicházejí v úvahu pro aplikaci v zemědělství. Kapitola je psána tak, aby na jedné straně vynikly hlavní myšlenky a směry ve vývoji a na druhé straně aby bylo zřejmé, kde jsou meze použitelnosti vyplývající ze současného stavu rozvoje těchto disciplín a ze stavu výpočetní techniky u nás.

1. ÚVOD. OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY A MATEMATICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

Matematické programování je podstatnou součástí matematických metod v ekonomii. Není to uzavřená vědní disciplína. Termín programování s příslušným přívlastkem je používán různými autory dosti volně, s výjimkou několika dnes již ustálených pojmů, jako je např. lineární programování. Většina těchto „programování“ vznikla (a vzniká) na základě řešení nějaké ekonomické úlohy, spočívající ve vybrání z několika možných variant výroby, přepravy či jiné činnosti v daných podmínkách té nejlepší. Všechny faktory, které mohou (alespoň podle názoru řešitele) ovlivnit řešení, jsou přitom vyjádřeny matematickými prostředky — je sestaven matematický model. Tím je rozhodování vlastně převedeno na řešení matematické úlohy. V každé fázi popsaného postupu vzniká ovšem řada dalších problémů matematické i ekonomické povahy, které jsou pak také v různé míře zahrnovány do příslušného programování.

Termín matematické programování používáme jako souhrnné označení pro všechna dále popsaná programování. Dříve než se jimi budeme blíže zabývat, uvedeme zjednodušený příklad.

Příklad 1. Vyšetřujeme specializovanou zemědělskou výrobní jednotku (JZD, státní statek), která má možnost si vybrat ze tří druhů zemědělských produktů (seno, mléko, hovězí maso) výrobu těch, které ji zaručují maximální čistý důchod. Přitom je tato zemědělská jednotka vázána některými omezeními, a to zejména výměrou luk, pastvin a počtem pracovních sil. Abychom mohli sestavit matematický model, označíme neznámé hledané údaje o optimální výrobě takto:

x_1 — počet tun vyrobeného a prodaného sena,

x_2 — počet dojnic,

x_3 — počet kusů skotu na žír.

Nechť čistý důchod za 1 t sena je 100 Kčs, za 1 dojnici 1500 Kčs a za 1 kus skotu na žír 800 Kčs ročně. Je-li tedy výroba popsána vektorem $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, lze celkový čistý důchod vyjádřit jako funkci tří proměnných

$$f(\mathbf{x}) = 100 x_1 + 1500 x_2 + 800 x_3. \quad (1)$$

Máme k dispozici 120 ha luk, 100 ha pastvin a 10 000 pracovních hodin. Známe-li údaje o výměře luk a pastvin, potřebné na vyprodukovaní jednotky každé neznámé a rovněž údaje o potřebě pracovních hodin na jednotku produkce, musíme v omezeních vyjádřit, že je přípustné uvažovat jen takové výrobní programy, které vystačí s disponibilním množstvím luk, pastvin a pracovních sil (s tzv. zdroji). Je-li např. na 1 t sena potřeba $\frac{1}{2}$ ha luk a 8 pracovních hodin, na 1 dojnici 4 ha luk, 2 ha pastvin a 90 pracovních hodin ročně a na 1 kus skotu na žír 2 ha luk, 2 ha pastvin a 30 pracovních hodin, můžeme omezení vyjádřit takto (předpokládáme-li pro jednoduchost lineární závislost):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x_1 + 4 x_2 + 2 x_3 &\leq 120 \quad (\text{louky}) \\ 2 x_2 + 2 x_3 &\leq 100 \quad (\text{pastviny}) \\ 8 x_1 + 90 x_2 + 30 x_3 &\leq 10\,000 \quad (\text{prac. síly}). \end{aligned} \quad (2)$$

Levá strana každého omezení vyjadřuje skutečnou spotřebu příslušného zdroje, pravá strana pak jeho disponibilní množství. Z důvodu ekonomické interpretovatelnosti výsledků je nutno připojit požadavek nezápornosti neznámých:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad (\text{zkráceně } \mathbf{x} \geq 0) \quad (3)$$

Matematický model úlohy je tedy určen funkcí (1), kterou máme maximalizovat, a omezeními (2) a (3), která musíme při volbě vektoru popisujícího výrobu respektovat.

Model každé úlohy spadající do oblasti matematického programování obsahuje nějaké vyjádření účelu rozhodování, tzv. účelovou funkci. Je to funkce vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, který popisuje rozhodnutí. Účelovou funkci budeme značit, podobně jako v příkladě 1, symbolem $f(\mathbf{x})$, která ovšem nemusí být vždy lineární funkcí složek vektoru $\mathbf{x}$.

Druhou složkou modelu jsou omezení, která můžeme (jak ještě dále objasníme) obecně zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}) &\leq 0 \\ &\dots\dots\dots \\ g_m(\mathbf{x}) &\leq 0, \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

kde: $g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})$ značí určité funkce vektoru $\mathbf{x}$.

V příkladě 1 je např. $g_1(\mathbf{x}) = 120 - \frac{1}{2}x_1 - 6x_2 - 4x_3 \geq 0$.

Úlohou maximalizovat účelovou funkci $f(\mathbf{x})$ při omezeních (4) se zabývá nelineární programování. Jsou-li všechny funkce $f(\mathbf{x})$ a $g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})$ lineární, jako je tomu v příkladě 1, jde o problematiku lineárního programování. Lineární programování je nejčastěji používaná a také nejznámější disciplína matematického programování.

Dynamické programování se zabývá modely, kde účelová funkce a omezení mají zvláštní tvar, a to takový, že vyhledání maxima účelové funkce (více proměnných) lze převést na sled jednorozměrných maximalizací. Takové modely často odpovídají ekonomickým systémům, vyvíjejícím se v čase.

Jestliže pracujeme s modelem, v němž vystupují náhodné veličiny, musíme k jeho řešení použít stochastického programování.

Výklad o jednotlivých druzích matematického programování a zmínky o některých jiných, které s nimi souvisí, uvedeme v dalších odstavcích s tím, že půjde hlavně o přehled a nikoliv o podrobnosti.

Matematické programování představuje dnes již rozsáhlý soubor poznatků, který nelze shrnout do jedné knihy, natož do jedné kapitoly. Matematická tvrzení uvádíme bez důkazů a rovněž se nezabýváme detailním popisem jednotlivých výpočetních algoritmů. Není ani třeba, aby se ekonomové tyto algoritmy „učili“, neboť výpočetní problematika je dosti komplikovaná a ve většině případů bude nutné se s výpočty obrátit na specializované instituce. Na druhé straně je vhodné seznámit se s jedním nebo dvěma algoritmy (lineárního programování) podrobněji k získání přehledu o způsobu a pracnosti výpočtů a také proto, že se doporučuje vypracovat před sestavením vlastního úplného modelu orientační zjednodušené výpočty, popřípadě i ručně. Tyto výpočty nám umožní bližší seznámení s problémem a zabrání hrubým logickým chybám. Údaje o literatuře, kde lze nalézt podrobné popisy algoritmů, uvádíme v textu.

Nezabýváme se také podrobným popisem jednotlivých aplikací matematického programování v zemědělství. Od školských schematizovaných příkladů (viz příklad 1) je ke skutečnosti dosti daleko. Přehled o stavu aplikací může čtenář získat nejlépe z publikovaných výzkumných zpráv. Pokud jde o socialistickou ekonomiku, doporučujeme materiály k oběma symposiím o využití matematických metod v zemědělské ekonomice, konaným v Praze v říjnu 1963 a listopadu 1964 [9]*). Na západě se tyto zprávy publikují jako tzv. Case studies ve formě separátů nebo v odborných časopisech, např. v Journal of Farm Economics.

2. ZÁKLADNÍ PRINCIPY LINEÁRNÍHO A NELINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

V matematickém programování se používá řada obrátů, které umožňují převést matematický model na tvar, který je z hlediska výkladu nebo z hlediska výpočtů nejvýhodnější. Jde zejména o tyto obraty:

- Změna smyslu nerovnosti vynásobením celé nerovnosti číslem -1 .

*) Tato kapitola tvoří obsahově celek s příští kapitolou. Odvolávky na literaturu (v hranatých závorkách) se týkají seznamu, který bude otištěn příště.

b) Změna maximalizace na minimalizaci a obráceně vynásobením účelové funkce číslem -1 . Platí totiž, že účelová funkce $f(\mathbf{x})$ nabývá maxima pro stejné $\mathbf{x}$ jako funkce $-f(\mathbf{x})$ minima a obráceně. To lze nahlédnout např. nakreslením grafu funkce $f(\mathbf{x})$ a $-f(\mathbf{x})$ (obr.).

Proto můžeme dále uvažovat jen případ maximalizace účelové funkce.

c) Převádění nerovností na rovnosti zavedením přídatných neznámých. Nerovnosti

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}) &\geq 0 \\ &\dots\dots\dots (5) \\ g_m(\mathbf{x}) &\geq 0 \end{aligned}$$

lze psát jako rovnice

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}) - x'_1 &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ g_m(\mathbf{x}) - x'_m &= 0 \end{aligned}$$

kde $x'_1, \dots, x'_m$ jsou nově zavedené nezáporné neznámé vyjadřující, o čemž je levá strana větší než pravá. Tyto neznámé mají vždy ekonomickou interpretaci. Například omezení (2) příkladu 1 lze psát pomocí přídatných neznámých jako

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x_1 + 4 x_2 + 2 x_3 + x'_1 &= 120 \\ 2 x_2 + 2 x_3 + x'_2 &= 100 \\ 8 x_1 + 90 x_2 + 30 x_3 + x'_3 &= 10\,000, \end{aligned} \quad (6)$$

kde x'_1 vyjadřuje výměru nevyužitých luk (při výrobě x_1, x_2, x_3); x'_2 výměru nevyužitých pastvin a x'_3 počet pracovních hodin, které při výrobě x_1, x_2, x_3 nebudou vyčerpány z celkového počtu 10 000 pracovních hodin.

Lze ukázat, že i když výroba $\mathbf{x}$ je optimální, mohou některé z přídatných neznámých být kladné, a to i v případech, že nejde o výrobu „ztrátových“ produktů. Tato skutečnost znamená, že je optimální nechat příslušný zdroj zčásti nevyužit.

Přesně vzato, přídatné neznámé nepřevádějí nerovnosti na rovnice, jak se často stručně říká, neboť s každou odstraněnou nerovností v (5) se objeví v modelu nová, jednodušší nerovnost, totiž $x'_1 \geq 0, \dots, x'_m \geq 0$.

d) V modelu se někdy objevují přímo rovnice, a to tehdy, kdy nevyčerpání zdrojů nebo nadprodukce není žádoucí. V případě potřeby můžeme tyto rovnice převést na nerovnost tak, že místo omezující podmínky

$$g_i(\mathbf{x}) = 0$$

připíšeme do systému (5) dvě nerovnosti

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) &\geq 0, \\ -g_i(\mathbf{x}) &\geq 0. \end{aligned}$$

Současné splnění těchto nerovností je možné jen tehdy, platí-li $g_i(\mathbf{x}) = 0$.

Další, méně často používané obraty, nebudeme zde blíže popisovat.

Jak jsme již řekli, jde v matematickém programování o vyhledání maxima (nebo minima, což nemusíme s ohledem na bod b) zvláště rozlišovat) účelové funkce $f(\mathbf{x})$ při vedlejších podmínkách. Z matematické analýzy umíme nalézt maximum bez vedlejších podmínek (viz kap. III, odst. 1.11.), čehož v matematickém programování nelze dobře užít, leda by vektor $\mathbf{x}$, v němž účelová funkce nabývá extrémní hodnoty, náhodou splňoval všechna

omezení. Pro hledání extrémů s vedlejšími podmínkami se v klasické analýze používá metody Lagrangeových multiplikátorů. Ani tato metoda není v matematickém programování příliš účinná, i když se s ní při aplikacích matematiky v ekonomii občas pracuje. Příčina obtíží je v tom, že mj. předpoklady, metoda Lagrangeových multiplikátorů vyžaduje, aby všechna omezení měla tvar rovnosti. To lze formálně splnit, píšeme-li v účelové funkci $f(\mathbf{x})$ a v omezeních (5), převedených na rovnice přidatnými neznámými, všude místo neznámé x_i neznámou z_i^2 a místo x'_i neznámou $z'_i{}^2$. Pak lze vynechat omezení nezápornosti neznámých. Úloha se tím však nesmírně zkomplikuje.

Ústřední význam pro lineární a nelineární programování má tzv. Kuhn-Tuckerův teorém, který nyní uvedeme.

Vyjděme z úlohy maximalizovat účelovou funkci $f(\mathbf{x})$ při omezeních (4). O funkcích $f(\mathbf{x})$ a $g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})$ budeme předpokládat, že jsou vesměs neryze konkávní (definici konkávní funkce viz kap. III odst. 1.10) a že mají spojité první parciální derivace podle všech neznámých. Pro případ lineárního programování jsou tyto podmínky zřejmě splněny. Jsou-li některé z funkcí $g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})$ nelineární, musíme připojit ještě tzv. předpoklad regularity: existuje nezáporný vektor $\mathbf{x}$ takový, že současně $g_1(\mathbf{x}) > 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) > 0$. Předpoklad regularity (týká se jen nelineárních omezení!) vylučuje, aby v omezujících podmínkách byla podle bodu d) zapsána rovnice jako dvě nerovnosti.

Každému omezení $g_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, m$, přiřadíme novou duální neznámou $u_i \geq 0, i = 1, \dots, m$, a sestavme tzv. lagrangeián úlohy, tj. novou funkci $n + m$ neznámých $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m$, která má tvar

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(\mathbf{x}). \quad (7)$$

Platí: Za výše uvedených předpokladů je nezáporný vektor $\bar{\mathbf{u}}$ řešením úlohy nelineárního (speciálně lineárního) programování právě tehdy, existuje-li nezáporný vektor $\bar{\mathbf{u}} = (u_1, \dots, u_m)$ takový, že platí

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \leq 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \bar{x}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \geq 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \cdot \bar{u}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Parciální derivace $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ a $\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}$ jsou ovšem funkce $\mathbf{x}$ a $\mathbf{u}$ a ve vztazích (8) se berou pro $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ a $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$.

Příklad 2. Hledejme minimum nelineární účelové funkce

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 \quad (9)$$

při omezeních

$$x_1 + x_2 \geq 4, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (10)$$

Přepíšeme-li úlohu na tvar, pro který jsme vyslovili Kuhn-Tuckerův teorém, dostaneme úlohu

$$\text{maximalizovat } -2x_1^2 - x_2^2$$

$$\text{při omezeních } x_1 + x_2 - 4 \geq 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

a langrangeián

$$\varphi(x_1, x_2, u) = 2x_1^2 - x_2^2 + u(x_1 + x_2 - 4),$$

kde u je duální neznámá, v tomto příkladě jediná. Nerovnosti a rovnice podle (8) mají tvar

$\mathbf{x}$ je sloupkový vektor a

$\mathbf{A}$ je matice typu (m, n) :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Tuto úmluvu o označení budeme nadále důsledně dodržovat, a abychom výklad příliš nekomplikovali, budeme předpokládat, že $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

Příklad 1 z první kapitoly je úlohou lineárního programování tvaru (12).

Obecným a výpočetně účinným postupem pro nalezení řešení úlohy lineárního programování je známá simplexová metoda. Její podrobný popis viz např. (4); zde ji pro úplnost jen stručně připomeneme na příkladu z odstavce 1.

Označíme-li hodnotu účelové funkce písmenem f , můžeme na f nahlížet jako na novou neznámou, jejíž maximální hodnotu hledáme. S použitím vztahů (6) můžeme úlohu lineárního programování s účelovou funkcí (1) a omezeními (2) považovat vlastně za úlohu řešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} f - 100 x_1 - 1500 x_2 - 800 x_3 &= 0 \\ \frac{1}{2} x_1 + 4 x_2 + 2 x_3 + x'_1 &= 120 \\ 2 x_2 + 2 x_3 + x'_2 &= 100 \\ 8 x_1 + 90 x_2 + 30 x_3 + x'_3 &= 10\,000 \end{aligned} \quad (13)$$

s neznámými $f, x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3$ ovšem s tím, že nás zajímá jen to řešení, kde f je největší možné a ostatní neznámé jsou nezáporné. Lze ukázat, že řešení lze nalézt, děláme-li se soustavou (13) tyto dovolené úpravy rovnic:

a) Z první rovnice vybereme neznámou, která má u sebe nejmenší záporný koeficient. Tuto neznámou nazveme klíčovou. V rovnicích (13) to bude neznámá x_2 s koeficientem -1500 . Potom vezmeme kladné koeficienty u této neznámé v dalších rovnicích (první vynecháme) a dělíme jimi čísla na pravé straně téže rovnice, ze které je koeficient. V rovnicích (13) jsou všechny koeficienty u x_2 kladné (4, 2, 90) a dostaneme tedy tři podíly:

$\frac{120}{4}, \frac{100}{2}, \frac{10\,000}{90}$. Jsou-li všechny koeficienty u klíčové neznámé nekladné, nemá úloha vůbec řešení.

b) Tu rovnici, u které je podíl vzniklý právě popsaným způsobem nejmenší (ve srovnání s ostatními podíly), nazveme rovněž klíčovou. V (13) to bude rovnice druhá s příslušným podílem $\frac{120}{4} = 30$, který je nejmenší. Klíčovou rovnici dělíme koeficientem u klíčové neznámé v této rovnici. [V (13) dělíme druhou rovnici číslem 4.] Potom násobíme klíčovou rovnici koeficientem u klíčové neznámé v první rovnici (-1500) a takto vynásobenou klíčovou rovnici odečteme od první rovnice. Totéž učiníme pro třetí a čtvrtou rovnici (apopř. i další, jsou-li jaké), ovšem s výjimkou klíčové, která v soustavě již zůstane beze změny (jen vydělena koeficientem u klíčové neznámé).

c) Celý postup opakujeme s takto transformovanou soustavou počínaje opět bodem a.

d) Nejsou-li již v první rovnici žádné záporné koeficienty, našli jsme řešení úlohy. Dostaneme je tak, že v poslední získané soustavě rovnic dosadíme nuly za všechny neznámé,

jejichž koeficienty netvoří jednotkový vektor a hodnoty ostatních proměnných čteme přímo na pravé straně rovnic.

Pro větší přehlednost a abychom zabránili zbytečnému opisování neznámých, bývá zvykem zpracovávat výpočty v tabulce, kde pracujeme jen s koeficienty, zatímco označení neznámých napíšeme nad sloupce tabulky jednou pro celý výpočet:

	f	x_1	x_2	x_3	x'_1	x'_2	x'_3	
1. část	1	-100	-1500	-800	0	0	0	0
	0	$\frac{1}{2}$	4	2	1	0	0	120
	0	0	2	2	0	1	0	100
	0	8	90	30	0	0	1	10 000
2. část	1	$\frac{175}{2}$	0	-50	375	0	0	4 500
	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	30
	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	-2	1	0	40
	0	-37	0	-15	$-\frac{45}{2}$	0	1	7 300
3. část	1	75	0	0	275	50	0	4 700
	0	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	10
	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	-2	1	0	40
	0	$-\frac{163}{4}$	0	0	$-\frac{105}{2}$	15	1	7 900

(14)

V první části tabulky je přepsána soustava (13), ve druhé části je učiněna transformace soustavy podle bodů a, b, v poslední části je uskutečněna další transformace s klíčovou neznámou x_3 a třetí rovnici jako klíčovou. Prvky, kterými se dělí klíčové rovnice, jsou orámovány. V poslední části tabulky již není v první rovnici žádný záporný koeficient a našli jsme tedy podle bodu d řešení. Přechteme je tak, že dosadíme za x_1 , x'_1 a x'_2 do poslední soustavy rovnic nuly a hodnoty ostatních neznámých jsou zřejmé

$$f = 4700, \quad x_2 = 10, \quad x_3 = 40, \quad x'_3 = 7900.$$

Ekonomicky to znamená, že z hlediska čistého důchodu je optimální chovat 10 krav-dojnic, 40 kusů skotu na žir a žádné seno neprodávat ($x_1 = 0$). Louky i pastviny budou přitom zcela využity ($x'_1 = 0$, $x'_2 = 0$), zatímco 7900 pracovních hodin lze uvolnit pro jiné použití. Hodnota dosaženého čistého důchodu bude 4700 Kčs.

Simplexovou metodou lze v principu řešit všechny úlohy lineárního programování. My jsme pro jednoduchost výkladu učinili předpoklad, že $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, čímž jsme její obecnost poněkud omezili, neboť ne všechny úlohy lze pomocí obrátů popsaných na začátku 2. odstavce převést na zde uvažovaný tvar (12). Protože však použití tzv. pomocných neznámých umožňuje předpoklad $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ odstranit, jde o záležitost výlučně technicko-početní a nebudeme se tím zde zabývat.

Při řešení ekonomických úloh pomocí lineárního programování se však objevují modely, které mají desítky až stovky neznámých i omezení. Řešit tyto úlohy simplexovou metodou ve formě, jak jsme ji zde popsali, by často znamenalo příliš mnoho výpočetního úsilí nebo času na samočinném počítači.

Proces zefektivnění výpočtů probíhal (a ještě probíhá) dvěma směry. Především úpravami simplexové metody tak, aby odpadly výpočty, které nejsou nezbytně nutné. Nejznámější z těchto úprav je tzv. revidovaná simplexová metoda. V práci [10] je např. uvedena srovnávací studie efektivity různých úprav simplexové metody a ukazuje se, že pro každý typ samočinného počítače (malý, střední, velký) je vhodná jiná úprava.

Druhým způsobem zefektivnění výpočtů je vývoj méně obecných algoritmů, fungujících jen pro jisté typy úloh lineárního programování. Nejznámějšími z těchto algoritmů jsou algoritmy pro řešení tzv. dopravních nebo distribučních problémů. V dopravním problému jde o navržení optimálního způsobu přepravy homogenního substrátu z několika skladů do několika míst určených tak, aby náklady spojené s přepravou byly minimální. Dopravním problémem je např. úloha stanovit z hlediska dopravních nákladů optimální plán svozu cukrovky z míst produkce do cukrovarů. O dopravních problémech již toho bylo napsáno mnoho i u nás a nebudeme je zde dále rozebírat. Výklad o dopravním problému nalezneme např. v knize [4].

Jistou důležitostí v zemědělství má tzv. zobecněný distribuční problém, který lze rovněž řešit podstatně úsporněji speciálním algoritmem než simplexovou metodou. Jeho hlavní rysy jsou zachyceny v následujícím příkladě 3 (existují ovšem i další varianty).

Příklad 3. Máme navrhnout optimální rozmístění produkce čtyř plodin do tří produkčních oblastí tak, aby náklady na zajištění plánované produkce byly minimální. Jsou dány tyto údaje:

Matice $\mathbf{K}$ průměrných hektarových výnosů každé plodiny v každé oblasti:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 12 & 20 & 15 & 6 \\ 10 & 18 & 14 & 5 \\ 14 & 22 & 14 & 7 \end{bmatrix}$$

Každý řádek matice se vztahuje k jedné oblasti, každý sloupec k jedné plodině. Například číslo 5 ve druhé řádce a čtvrtém sloupci znamená, že průměrný hektarový výnos čtvrté plodiny ve druhé oblasti je 5 q/ha.

Dále je dána matice $\mathbf{C}$ průměrných nákladů na 1 ha na pěstování každé plodiny v každé oblasti (tj. matice součinů průměrných nákladů na 1 q a průměrných hektarových výnosů):

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 780 & 600 & 740 & 1400 \\ 900 & 700 & 650 & 1300 \\ 1000 & 800 & 600 & 1800 \end{bmatrix}$$

Právě tak jako v matici $\mathbf{K}$ i zde se řádky vztahují k oblastem a sloupce k plodinám. Například číslo 1300 ve druhé řádce a čtvrtém sloupci znamená, že vypěstování 5 q čtvrté plodiny na 1 ha ve druhé oblasti stojí 1300 Kčs.

Nechť výměra orné půdy, na níž přichází pěstování plodin v úvahu, činí v jednotlivých oblastech postupně 120 tisíc hektarů (v první oblasti), 200 tisíc hektarů (ve druhé oblasti) a 160 tisíc hektarů (ve třetí oblasti). Plánovaná produkce, kterou je nutno zajistit, nechť činí u jednotlivých plodin (v tis. q) 1440, 3600, 1120 a 560.

Označíme-li x_{ij} počet hektarů v tisících, které budou v oblasti i ($i = 1, 2, 3$) osety plodinou j ($j = 1, 2, 3, 4$), můžeme účelovou funkci (celkové náklady na produkci v tisících Kčs) zapsat jako

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & 780 x_{11} + 600 x_{12} + 740 x_{13} + 1400 x_{11} + \\ & + 900 x_{21} + 700 x_{22} + 650 x_{23} + 1300 x_{22} + \\ & + 1000 x_{31} + 800 x_{32} + 600 x_{33} + 1800 x_{33}. \end{aligned}$$

V omezeních musíme vyjádřit jednak to, že nesmíme překročit disponibilní množství orné půdy v žádné z oblastí, a jednak, že je nutné zajistit alespoň plánovanou produkci. První požadavek zajišťuje

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{11} \leq 120$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{22} \leq 200$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{33} \leq 160$$

a druhý

$$12 x_{11} + 10 x_{21} + 14 x_{31} \geq 1440$$

$$20 x_{12} + 18 x_{22} + 22 x_{32} \geq 3600$$

$$15 x_{13} + 14 x_{23} + 14 x_{33} \geq 1120$$

$$6 x_{11} + 5 x_{22} + 7 x_{33} \geq 560.$$

Požadujeme, aby všechny neznámé byly nezáporné. To, že neznámé mají dva indexy místo jednoho, je ovšem zcela nepodstatné. Speciální algoritmus pro úlohu tohoto typu umožňuje při řešení pracovat s tabulkou o rozměrech 3×4 (počet oblastí $\times$ počet plodin), zatímco klasická simplexová metoda by vyžadovala nejméně 12 sloupců pro neznámé a 7 řádek pro omezení.

Závěrem této kapitoly se budeme zabývat již zmíněnou důležitou vlastností úloh lineárního programování — dualitou. Napišme lagrangian (7) pro úlohu lineárního programování (12).

Dostaneme

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \mathbf{c} \mathbf{x} + \mathbf{u} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}) = \\ &= \mathbf{c} \mathbf{x} - \mathbf{u} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{u} \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (15)$$

kde $\mathbf{u}$ je řádkový vektor duálních neznámých: $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$.

Podíváme-li se na lagrangian (15), vidíme nápadnou symetrii s ohledem na dvojice vektorů $\mathbf{c}, \mathbf{x}$ a $\mathbf{b}, \mathbf{u}$ (zhruba řečeno, kdybychom obě dvojice zaměnili, dostaneme totéž). Na základě této symetrie lze odvodit teorii duality úloh lineárního programování, jejíž hlavní tvrzení zde uvedeme. Ke každé úloze

$$\begin{aligned} &\text{maximalizovat } \mathbf{c} \mathbf{x} \\ &\text{při omezeních } \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (12)$$

lze přiřadit jinou úlohu lineárního programování, tzv. duální, která má stejné koeficienty jako původní úloha, jen jinak uspořádané:

$$\begin{aligned} &\text{minimalizovat } \mathbf{u} \mathbf{b} \\ &\text{při omezeních } \mathbf{u} \mathbf{A} \geq \mathbf{c} \\ &\mathbf{u} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (16)$$

Platí: Má-li jedna z úloh (12) nebo (16) řešení, má řešení i druhá úloha a hodnoty obou účelových funkcí se sobě rovnají.

Příklad 4. Duální úlohou k úloze s účelovou funkcí (1) a omezeními (2) je úloha minimalizovat $120 u_1 + 100 u_2 + 10\,000 u_3$ při omezeních

$$\frac{1}{2} u_1 + 8 u_3 \geq 100$$

$$4 u_1 + 2 u_2 + 90 u_3 \geq 1500$$

$$2 u_1 + 2 u_2 + 30 u_3 \geq 800$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0.$$

Podstatné je, že při výpočtu jedné úlohy simplexovou metodou můžeme ve výpočetní tabulce bez jakýchkoliv dalších výpočtů přecházet i řešení duální úlohy. Je-li původně řešenou úlohou úloha typu (12), najdeme řešení úlohy k ní duální v první rovnici poslední části tabulky, a to jako koeficienty u přídatných neznámých. Pro náš příklad tedy

$$u_1 = 275, u_2 = 50, u_3 = 0.$$

Z ekonomického hlediska je důležité, že duální neznámé poskytují další cenné informace pro rozhodování. Omezíme-li výklad na příklady typu (12), pak o duálních neznámých platí: Zvolíme-li dostatečně malé h , zvětší se zvětšením disponibilního množství i -tého zdroje o h hodnota účelové funkce o $u_i h$ nebo zmenšením disponibilního množství i -tého zdroje se zmenší hodnota účelové funkce o $u_i h$.

V našem příkladě 1 můžeme tedy říci, že získáním dalšího hektaru luk se čistý důchod zvýší o 275 Kčs (v nejhorším případě to platí přibližně — klademe $h = 1$), získáním dalšího hektaru pastvin o 50 Kčs a získáním další pracovní síly se nezmění ($u_3 = 0$), neboť při optimálním programu není v našem případě pracovní síla zcela využita.

Duální neznámé zde tedy poskytují jakési relativní ohodnocení „úzkoprofilovosti“ zdrojů a jejich hodnoty mohou sloužit za vodítko při rozhodování o optimálních investicích, při stanovení „spravedlivých“ cen za pronájem apod. Upozorňujeme ovšem, že u každého typu úloh lineárního programování je ekonomický význam duálních neznámých jiný, a je nutné umět jej stanovit. Protože to vyžaduje podrobnějšího rozboru duality, odkazujeme čtenáře na učebnice lineárního programování.

Pomocí duality lze rovněž značně usnadnit výpočty některých typů lineárních úloh.

V. Matematické programování (pokračování)

4. Nelineární programování

Nelineární modely jsou nejčastěji konstruovány jako zpřesnění modelů lineárních. Uvažujme např. úlohu tvaru (12) a předpokládejme, že jde o maximalizaci čistého důchodu podobně jako v příkladě 1. Koefficienty c_i v účelové funkci znamenají v tomto případě čistý důchod na jednotku i -tého druhu výrobku a v lineárním modelu jsou to konstanty nezávislé na x_i , tj. na velikosti produkce i -tého výrobku. To však zřejmě neodpovídá skutečnosti, neboť s rozsahem výroby povětšinou klesají náklady na jednotku a čistý důchod na jednotku roste. Chceme-li tedy přesněji vystihnout skutečnost, musíme c_i považovat za funkci x_i , tedy $c_i = c_i(x_i)$. Účelová funkce má potom tvar

$$f(\mathbf{x}) = c_1(x_1)x_1 + c_2(x_2)x_2 + \dots + c_n(x_n)x_n, \quad (17)$$

což již není obecně lineární funkce. Vychází však otázka, jak najít tvar funkcí $c_i(x_i)$ v praxi. Nejčastěji se uvažuje takto: Nejjednodušší typ funkce c_i = konstanta, nevystihl dobře skutečnost, měl ale tu přednost, že vedl k lineárnímu modelu dobře počtené zvládnutelnému. Další jednoduchý typ funkční závislosti je polynom prvního stupně (lineární závislost)

$$c_i(x_i) = p_i + q_i x_i,$$

kde p_i a q_i jsou konstanty. Očekáváme, že použití těchto vztahů v účelové funkci ji ještě nezkomplikuje natolik, aby řešení úlohy činilo nepřekonatelné obtíže. Pokud by toto vystižení skutečnosti nebylo ještě dobré, musíme použít polynomu vyššího stupně, např. druhého, třetího atd., až dosáhneme vyhovující přesnosti. Výpočty, potřebné k nalezení řešení, se tím ovšem zkomplikují. V matematické analýze se dokazuje, že za předpokladu spojitosti $c_i(x_i)$ lze tuto funkci aproximovat polynomem dostatečně vysokého stupně s libovolnou přesností.

Uvážíme-li nároky na přesnost modelu, spolehlivost potřebných statistických podkladů a výpočetní námaž, kterou jsme ochotni vynaložit na výpočet, zůstaneme povětšinou u lineární závislosti (18). Koefficienty p_i a q_i stanovíme metodou nejmenších čtverců nebo jiným jednoduchým způsobem. Účelová funkce (17) je pak kvadratická:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (p_i + q_i x_i) x_i = \sum_{i=1}^n p_i x_i + \sum_{i=1}^n q_i x_i^2. \quad (19)$$

Poznámka: Jde-li o maximalizaci čistého důchodu a jsou-li v úloze omezení, požadující, aby se každý výrobek vyráběl nejméně v množství stanoveném plánem ($x_i \geq l_i > 0$), je možné najít tvar funkce $c_i(x_i)$ přímo z evidence o výrobe, aniž bychom použili metody nejmenších čtverců. Jednotkový čistý důchod lze totiž často vyjádřit jako

$$c_i(x_i) = r_i - p_i - \frac{q_i}{x_i},$$

kde: r_i je cena za jednotku výrobku i ,
 p_i jsou proporcionální náklady a
 q_i jsou fixní náklady na výrobek i .

V tomto případě $c_i(x_i)$ není konstanta, ale model je přesto lineární, neboť účelová funkce má tvar

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \left(r_i - p_i - \frac{q_i}{x_i} \right) x_i = \sum_{i=1}^n (r_i - p_i) x_i - \sum_{i=1}^n q_i,$$

což je lineární funkce. Výraz $\sum_{i=1}^n q_i$ můžeme ovšem vynechat, neboť hodnota řešení $\mathbf{x}$ se nezmění, přičteme-li k účelové funkci konstantu.

V zemědělství jsou často závislosti mezi jednotlivými druhy produkce tak spleťté, že ani závislost typu (17) nevystihuje dobře skutečnost. Pak je třeba hledat účelovou funkci přímo ve formě regresní plochy (resp. nadplochy) a nikoliv jen nahrazovat konstanty v lineární formě regresními křivkami. Například Edwards v práci [2] se zabývá problémem maximalizace zisku v zemědělském závodě a ukazuje, že jej lze vyjádřit jako

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n r_i x_i - k \exp \left\{ p_0 + \sum_{i=1}^n p_i x_i \right\},$$

kde r_i jsou ceny za jednotku i -tého produktu, a druhý výraz vyjadřuje výrobní náklady. $k, p_0, p_1, \dots, p_n$ jsou konstanty regresní plochy stanovené obvyklou technikou na základě empirických údajů.

Úplný přehled o nelineárních modelech nalezne čtenář v kompendiální práci [7], kde je též rozsáhlý seznam literatury. Abychom ilustrovali bohaté možnosti nelineárních modelů, uvedme ještě tento příklad.

Příklad 5. Předpokládejme, že máme umístit n druhů specializované zemědělské výroby na n předem vybraných farem (resp. do n oblastí). Se specializací výroby však roste objem kooperace mezi jednotlivými specializovanými farmami či oblastmi (dále budeme mluvit jen o farmách). Kdybychom rozmístili výrobu bez zřetele na tuto kooperaci, je nebezpečí, že mnoho z toho, co specializací získáme, ztratíme zase díky vzrůstu nákladů na dopravu mezi jednotlivými farmami. Popíšeme nejjednodušší formu tzv. kvadratického přirazovacího modelu, jehož pomocí lze najít takové umístění výroby, že náklady na kooperaci jsou minimálně možné.

Očíslováme nejdříve pevně jednotlivé druhy výroby čísly 1, 2, ..., n a stejně očíslováme vybrané farmy. Obě očíslování jsou zcela libovolná a nezávislá. Rozsah dopravy v tunách za nějaké časové období (např. 1 rok) bude záviset jen na druhu výroby, a můžeme jej udát pomocí matice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Čísla b_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) udávají tedy očekávaný objem dopravy v tunách mezi i -tým druhem výroby a j -tým druhem výroby, ať ta už je umístěna kdekoliv.

Dopravní náklady na přepravu jedné tuny zboží mezi závody budou záviset na vzdálenostech mezi farmami, na něž výrobu umísťujeme. Necht' jednotkové dopravní náklady jsou udány touto maticí

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}.$$

Prvky c_{kl} ($k, l = 1, 2, \dots, n$) udávají tedy dopravní náklady za 1 t mezi farmou k a l . Máme rozhodnout, jakou výrobu na kterou farmu umístit, aby celkové dopravní náklady vyplývající z nutné kooperace, byly minimální. Zaveďme proto n^2 neznámých x_{rs} ($r, s = 1, 2, \dots, n$), které mohou nabývat jen dvou hodnot:

$x_{rs} = 1$, bude-li výroba s číslem r umístěna na farmě čís. s ,

$x_{rs} = 0$, bude-li tomu jinak.

Účelovou funkci, tj. celkové dopravní náklady, pak můžeme vyjádřit jako

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i,j,k,l=1}^n b_{ij} c_{kl} x_{ik} x_{jl}. \quad (20)$$

Lze nahlédnout, že výraz (20) skutečně udává zmíněné dopravní náklady. K tomu, aby objem přepravy mezi farmami k a l byl b_{ij} , musí na farmě k být umístěna výroba i a na farmě l výroba j . K celkovým nákladům pak přeprava mezi farmami k a l přispěje částkou $b_{ij} c_{kl}$. V účelové funkci je u tohoto výrazu součin neznámých $x_{ik} x_{jl}$, který bude roven jedné právě tehdy, bude-li umístění takové, jak jsme právě popsali. Jinak bude roven nule a náklady se nezapočtou. Na neznámé x_{rs} klademe ještě tato omezení:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n x_{rs} &= 1, & s &= 1, 2, \dots, n \\ \sum_{s=1}^n x_{rs} &= 1 & r &= 1, 2, \dots, n \\ x_{rs}^2 - x_{rs} &= 0 & r, s &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (21)$$

První omezení vyjadřuje, že každá výroba musí být někde umístěna, druhé vyjadřuje, že každá farma musí mít přiřazenu právě jednu výrobu, a poslední omezení je formálním zápisem požadavku, že neznámé musí být buď nuly nebo jedničky.

Úloha nelineárního programování tedy spočívá v nalezení minima účelové funkce tvaru (20) při omezeních (21).

Uvedme ještě několik poznámek k problematice výpočtů v nelineárním programování.

Na rozdíl od lineárního programování neexistuje žádná univerzální metoda, již bychom mohli řešit všechny nelineární úlohy. Existuje dokonce řada úloh, které mají důležité praktické aplikace a které nelze zatím vůbec řešit při přijatelném objemu výpočetních prací.

Z úloh nelineárního programování jsou dnes nejlépe řešitelné ty, které splňují předpoklady Kuhn-Tuckerova teorému. To vyplývá z centrálního postavení této věty v teorii lineárního i nelineárního programování. Nejvíce omezující je právě požadavek konkávnosti účelové funkce a funkcí vystupujících v omezeních. Někdy se používá termínu konkávní programování na zdůraznění, že v příslušném pojednání se autor zabývá jen těmi příznivými případy, které splňují předpoklady Kuhn-Tuckerova teorému (popřípadě nepodstatně pozměněné proti naší formulaci). Ve stejném významu se používá i názvu konvexní programování, neboť někteří autoři převádějí všechny úlohy na minimalizaci, a potom je třeba požadovat u účelové funkce konvexnost.

Z toho, co bylo řečeno na začátku této kapitoly, vyplývá, že v praxi přichází nejčastěji v úvahu případ, kdy účelová funkce má tvar (19) a omezení jsou lineární. Je-li účelová funkce konkávní, říkáme, že jde o úlohu kvadratického programování. Přesněji řečeno, v kvadratickém programování se připouští i poněkud obecnější tvar účelové funkce, totiž

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \mathbf{x} + \mathbf{x}' \mathbf{D} \mathbf{x},$$

kde čárka u $\mathbf{x}$ značí transpozici a $\mathbf{D}$ je matice čísel taková, že $f(\mathbf{x})$ je konkávní (tzv. negativně semidefinitní matice — viz [5] nebo [10]).

Nejznámějším a poměrně účinným výpočetním postupem nelineárního programování je tzv. Wolfeho metoda, určená právě pro řešení úloh kvadratického programování. Její podstata spočívá v tom, že se pomocí nepatrně upravené simplexové metody řeší nerovnosti (8). Příklad 2 z odstavce 2, je jednoduchým příkladem úlohy kvadratického programování, kde $\mathbf{c} = (0, 0)$ a

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Jinak existuje velký počet různých vyzkoušených i méně vyzkoušených algoritmů na řešení různých typů úloh konkávního programování, a vybrat z nich pro danou úlohu ten nejvhodnější, je za dnešního nepřehledného stavu dosti obtížné.

Z úloh, které nesplňují podmínky Kuhn-Tuckerova teorému, mají v současnosti ještě jisté naděje na úspěšné vyřešení úlohy, kde v omezeních jsou obsaženy podmínky požadující, aby všechny složky řešení x byla celá čísla. V takovém případě mluvíme o celočíselném programování. Příklad 5 je tedy úlohou celočíselného nelineárního programování. Algoritmy pro řešení nelineárních celočíselných úloh vycházejí povětšinou z toho, že existuje jen konečný (i když veliký) počet alternativ, a snaží se udat pravidlo, jak se vyhnout zkoušení všech těchto alternativ, chceme-li najít tu nejlepší.

V případě lineárního celočíselného programování existuje úprava simplexové metody (tzv. Gomoryho algoritmus), která umožňuje nalézt celočíselné řešení postupným přidáváním dalších omezení k výpočetní tabulce.

Často se podmínky celočíselnosti původně nerespektují a očekává se, že řešení získané zaokrouhlením celočíselného výsledku bude blízko k optimálnímu. To lze udělat, jsou-li výsledky řádově alespoň desítky, jako je tomu např. v příkladě 1. Tam nám vyšlo „náhodou“ přímo celočíselné řešení. V úlohách, jako je příklad 5, to ovšem udělat nejde.

Nezávisle na předchozím závisí řešitelnost nelineárních úloh podstatně na počtu neznámých, vystupujících v úloze. Úlohy s několika málo neznámými lze řešit, ať už je jejich tvar jakýkoliv, zatímco řešení nelineárních úloh, kde počet neznámých jde do stovek, činí velké obtíže, i když splňují podmínky Kuhn-Tuckerova teorému.

5. OSTATNÍ DRUHY PROGRAMOVÁNÍ

5.1 Dynamické programování

Dynamické programování se zabývá vyhledáváním extrémů funkcí více proměnných při vedlejších podmínkách, a to pomocí zvláštního postupu, kterým se úloha s více neznámými převádí na posloupnost úloh s jednou neznámou, jejichž řešení však závisí na jistých parametrech.

Protože tento postup je účinný jen při řešení modelů vznikajících jako matematická formulace časově návazných rozhodovacích problémů (které budeme dále charakterizovat), nahlíží se na dynamické programování jako na samostatnou disciplínu, nikoli jako na jednu z metod nelineárního programování.

Dynamické programování lze použít, jestliže rozhodovací problém má tyto vlastnosti:

a) Rozhodování se týká systému, který se vyvíjí v čase a je zcela určen malým počtem parametrů.

b) Na jistých stadiích vývoje systému je třeba vybrat jedno z více možných rozhodnutí. Výsledkem tohoto rozhodnutí je nějaká změna parametrů systému.

c) Pro budoucí vývoj systému je rozhodující jen současný stav. Jinak se minulý průběh v budoucnosti neprojeví.

d) Účelem rozhodování je maximalizace (nebo minimalizace) nějaké funkce parametrů systému.

Uvedeme příklad, který lze řešit pomocí dynamického programování:

Příklad 6. Předpokládejme, že máme stádo skotu, jehož počáteční stav je 100 kusů. Z tohoto stavu můžeme x_1 kusů prodat za průměrnou cenu c Kčs za kus a zbývající část stáda se nám za rok rozmnoží na $a(100 - x_1)$ kusů, kde $a > 1$ je dané číslo. Na začátku dalšího roku můžeme z takto získaného stáda opět x_2 kusů prodat a zbytek se za další rok rozmnoží na $a[a(100 - x_1) - x_2]$ kusů atd. Nechtě náklady na roční chov stáda, které má na začátku roku stav y , jsou dány funkcí $g(y)$, kterou známe. Je otázka, kolik kusů máme v každém roce prodávat, aby celková částka, získaná prodejem po odečtení nákladů na chov, byla za N let hospodaření maximálně možná.

Řešením této úlohy se nebudeme blíže zabývat. Dynamické programování (na rozdíl třeba od lineárního) není dnes sbírkou hotových algoritmů, ale spíše metodou pro jejich nalezení pro každý konkrétní případ, a jeho princip není natolik přehledný, aby se dal na jednom příkladě dobře osvětlit. Odkazujeme proto čtenáře na [1] a [5].

5.2 Stochastické programování

Stochastické programování se zabývá modely, ve kterých se vyskytují náhodné veličiny. Takové modely by měly zřejmě všestranné praktické aplikace, avšak naráží se na obtíže matematické povahy, a to např. hned při přesnější definici toho, co je vlastně úlohou sto-

chastického programování. Až dosud jsme všechny problémy mohli považovat za speciální případ úlohy najít maximum nějaké funkce $f(\mathbf{x})$ při omezeních typu (4). Jestliže však funkce $f(\mathbf{x})$ závisí také na náhodných veličinách, je sama náhodnou veličinou a není již dobře jasné, co znamená hledat její extrém. Různí autoři pod „optimalizací“ modelu s náhodnými veličinami mají proto na mysli různé úlohy.

Nejvíce rozpracované, alespoň pokud jde o lineární modely, je vyšetřování stability řešení. V tomto případě se nahradí náhodné veličiny v modelu nějakou charakteristikou polohy, nejčastěji průměrem, a vyšetřuje se, co se děje s řešením získaným „nestochastickou“ metodou, jestliže se výchozí parametry úlohy změní. Tyto metody lze ovšem použít i v případě, že příčina změny parametrů je jiná než náhodná.

Velmi náročně lze formulovat úlohu stochastického programování jako úlohu nalezení rozložení pravděpodobnosti náhodné veličiny maximum $f(\mathbf{x})$ v závislosti na $\mathbf{x}$ jako parametru, který vyhovuje systému omezení, která dostaneme tak, že do omezení (4) postupně „dosadíme“ všechny možné realizace náhodných veličin v nich vystupujících.

Poněkud jednodušší je hledat místo rozložení maxima $f(\mathbf{x})$ jen maximum střední hodnoty této účelové funkce. Požadavek, aby omezení (4) byla splněna pro všechny možné realizace v nich vystupujících náhodných veličin, je však příliš přísný a výsledek by často nebyl užitečný. Proto se někdy požaduje splnění omezení (4) jen s jistou, pevně stanovenou pravděpodobností.

Nejbližší k praktickým aplikacím mají, jak se zatím zdá, ty úlohy stochastického programování, jejichž snahou je omezit variabilitu výsledků stochastického modelu, přičemž se omezují na charakteristiku náhodných veličin pomocí prvních dvou momentů. Uvedeme příklad.

Příklad 7. Družstvo má k dispozici H hektarů půdy a chce tuto výměru oset n různými druhy plodin tak, aby dosáhlo maximálního čistého důchodu. Hektarové výnosy jednotlivých plodin jsou však, přesně vzato, náhodné veličiny, a družstvo má zájem na tom, aby plánovaný celkový čistý důchod na této náhodnosti příliš nezávisel. Abychom sestavili model pro nalezení optimálního osevního plánu, zavedme toto označení:

m_i = průměrný hektarový výnos i -té plodiny v q ;

s_i^2 = rozptyl tohoto hektarového výnosu;

(obě tyto veličiny lze snadno odhadnout z výsledků předchozích let)

z_i = čistý důchod za cent i -té plodiny v Kčs;

x_i = zatím neznámá výměra, která bude oseta i -tou plodinou.

Průměrný celkový čistý důchod můžeme v této symbolice zřejmě vyjádřit jako

$$\sum_{i=1}^n z_i m_i x_i$$

a jeho rozptyl

$$\sum_{i=1}^n z_i^2 s_i^2 x_i^2.$$

Vezměme za účelovou funkci výraz

$$f(\mathbf{x}) = a \sum_{i=1}^n z_i m_i x_i - b \sum_{i=1}^n z_i^2 s_i^2 x_i^2,$$

kde a a b jsou nezáporná čísla zvolená jakožto váhy vyjadřující důležitost jednotlivých členů v účelové funkci. Volíme-li např. $a = 1$ a $b = 0$, nebereme vůbec zřetel na náhodnou povahu čistého důchodu, zatímco volba $a = 0$, $b = 1$ jako druhá krajnost povede k nalezení osevního plánu, zajišťujícího stabilní čistý důchod, ovšem bez ohledu na jeho velikost. Omezení úlohy budou

$$\sum_{i=1}^n x_i = H, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

a popřípadě další, vyplývající z omezených zdrojů.

Úlohy popsaného typu mají četné varianty a vesměs jsou řešitelné, neboť vedou na úlohu nelineárního programování, splňující podmínky Kuhn-Tuckerova teorému. Pro podrobnější přehled a literaturu o stochastickém programování odkazujeme na [6].

5.3 Parametrické programování

Parametrické programování se zabývá úlohami, kde v modelu místo některých konstant jsou známé funkce času. Výsledný vektor x je potom ovšem také funkcí času.

Příkladem lineárního parametrického programování je úloha

$$\begin{aligned} &\text{maximalizovat} && c x \\ &\text{při omezeních} && A x \leq b + b_1 t \\ & && x \geq 0, \end{aligned}$$

kde b_1 je známý sloupcový vektor a t značí čas.

Takovéto úlohy lineárního programování, kde navíc i závislost na čase je lineární, jsou jednoduše řešitelné a odpovídají situaci, kdy disponibilní množství zdrojů (nebo vezme-li duální úlohu — ceny) se plánovitě mění a kdy závislost změn na čase lze aproximovat závislostí lineární.

Názvy separovatelné programování, lineární lomené programování apod. jsou názvy pro úlohy nelineárního programování, kde účelová funkce má speciální tvar (je separovatelná, lineární lomená apod.).

Termín vědecké programování se používá buď ve stejném významu jako matematické programování, nebo ještě v poněkud obecnějším, ekvivalentním zhruba termínu operační výzkum.

Literatura

- [1]. Bellman R. E., Drayfus S. E.: Applied Dynamic Programming. Princeton University Press, 1962. — [2]. Edwards C.: Non-Linear Programming and Non-Linear Regression Procedures. Journal of Farm Economics, sv. 44 (1962), č. 1, 100-114. — [3]. Heady E. O.: Linear Programming in Agriculture. The Iowa State College Press, 1959. — [4]. Korda B.: Učebnice lineárního programování. SNTL. 1962. — [5]. Korda B.: Matematické metody v ekonomii. SNTL - v tisku. — [6]. Madansky A.: Methods of Solution of Linear Programs under Uncertainty. Operations Research, sv. 10 (1962), č. 4, 463-471. — [7]. Maňas M.: Nelineární programování. Ekonomickomatematický obzor, sv. 1 (1965), č. 1. — [8]. Seznam literatury o použití matematických metod v ekonomice a v zemědělství. Zpracoval Ústav vědeckotechnických informací MZLVH a VÚZE. — [9]. Zemědělská ekonomika, č. 10 (1964), č. 1-2. — [10]. Zoutendijk G.: Methods of Feasible Directions; A Study in Linear and Non-Linear Programming. Elsevier Publishing Comp., Amsterdam 1960. (Existuje ruský překlad).

VI. Teorie her

1. ZÁKLADY TEORIE

1.1. Úvod

Teorie her je matematický obor, který se zabývá řešením konfliktních situací. Teorie her vznikla poměrně nedávno. Její základy jsou položeny v pracích von Neumanna (1928) a Borela (1921). Protože tyto základní práce byly psány pro matematiky, nebyly odvozené metody dosti dlouho aplikovány v praxi. Druhá světová válka však vynutila další rozvoj teorie i širší aplikace, zejména na vojenské problémy. Odtud pramení jistě také i vliv vojenské terminologie na názvy v teorii her se objevující.

Konfliktní situace se však objevují i v mírovém životě. V kapitalistických státech může jít např. o boj mezi trusty. Potom je ovšem nutno přihlídnout k tomu, že jednotliví účastníci takovýchto ekonomických her mohou mezi sebou tvořit koalice, různě blufovat apod.

Protože se zde chceme vyhnout složitým matematickým formulacím, omezíme se jen na nejjednodušší případy her. Výklad bude ilustrován řadou zcela jednoduchých příkladů, aby bylo možno si na nich osvojit zaváděné pojmy.

1.2. Základní pojmy

Budeme se dále zabývat výlučně takovými hrami, jichž se účastní jen dva hráči. Pro stručnost označíme prvního hráče jako A, druhého jako B. Budeme předpokládat, že jsme v situaci hráče A a naším protivníkem je hráč B.

Strategií nazveme souhrn pravidel, který jednoznačně určuje postup hráče v každém okamžiku, kdy je na tahu. Teoreticky lze předpokládat, že si každý hráč zvolil strategii už před zahájením celé hry. Musel by ovšem uvážit všechny možné situace, které se při jeho předchozích tazích mohou objevit, a v každé z takových situací rozhodnout, jaký učiní další tah. Kdyby uskutečnil úplný soupis takových situací a svých rozhodnutí, nemusel by být při hře osobně přítomen. Tahy podle jeho sepsaných pokynů by dělal soudce.

Hra se nazývá konečnou, má-li každý z obou hráčů k dispozici jen konečný počet strategií. V opačném případě se hra nazývá nekonečnou.

Nechť hráč A má k dispozici m strategií $A_1, \dots, A_m$, hráč B pak n strategií $B_1, \dots, B_n$. O takovéto hře říkáme, že je typu $m \times n$.

Nejsou-li ve hře žádné tahy náhodné, pak volbou strategie A_i hráčem A a volbou strategie B_j hráčem B je výsledek hry jednoznačně určen. Nechť při strategiích A_i, B_j hráč A vyhraje a_{ij} . Tuto výhru si budeme prozatím představovat jako peněžní částku. Je-li číslo a_{ij} záporné, znamená to, že hráč A tuto částku prohrává.

Hra s nulovým součtem je taková hra, kde jeden hráč vyhrává právě tu částku, kterou prohrává druhý. Každou hru $m \times n$ s nulovým součtem lze zapsat v přehledném tvaru takto:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array}
 \begin{array}{c} \left| \right. \\ \left| \right. \\ \left| \right. \\ \left| \right. \\ \left| \right. \end{array}
 \begin{array}{cccc} B_1 & \dots & B_j & \dots & B_n \\ a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{array}
 \begin{array}{c} \left| \right. \\ \left| \right. \\ \left| \right. \\ \left| \right. \\ \left| \right. \end{array}
 \end{array} \quad (1)$$

Matici $\mathbf{M} = (a_{ij})$ nazýváme maticí hry nebo také výplatní maticí. Ihned vidíme, že hráč B při strategiích A_i, B_j vyhrává částku $-a_{ij}$, takže není třeba vypisovat zvlášť matici hry s ohledem na hráče B.

Příklad. Každý z hráčů si může zvolit sudé nebo liché číslo. Jsou-li obě čísla sudá nebo obě lichá, vyhrává hráč A částku 1. Je-li jedno z čísel sudé a jedno liché, prohrává hráč A částku 1. Hráč A má dvě strategie: A_1 (vybrat si liché číslo) a A_2 (vybrat si sudé číslo). Právě tak i hráč B má dvě strategie: B_1 a B_2 , odpovídající volbě lichého nebo sudého čísla. Matice hry je

$$\begin{vmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \end{vmatrix}, \quad (2)$$

Řešení této hry bude uvedeno pod 2.3.

2. ŘEŠENÍ HER METODOU MINIMAXU

2.1. Matice hry se sedlovým prvkem

Všimněme si matice (1). Když hráč A volí strategii A_i , má zaručenu výhru nejmeně $\min_j a_{ij}$. Hráč A si může vybrat tu strategii, pro kterou je uvedená částka největší. Existuje tedy taková strategie hráče A, která mu zajišťuje výhru nejmeně $\max_i \min_j a_{ij}$.

Právě tak lze dokázat, že existuje taková strategie hráče B, která mu zajišťuje výhru nejmeně $\max_j \min_i (-a_{ij}) = -\min_j \max_i a_{ij}$. V tomto případě nemůže ovšem A získat víc než $\min_j \max_i a_{ij}$. Když platilo

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = C,$$

pak hráč A si může vybrat takovou strategii, že v každé partii vyhraje nejmeně C ; přitom hráč B může zvolit takovou strategii, že výhra hráče A nebude větší než C . Tyto strategie jsou zřejmě pro oba hráče optimální.

Ale existuje matice, které takovýto vztah nespĺňují. Např. pro matice (2) platí

$$\max_i \min_j a_{ij} = -1 \neq \min_j \max_i a_{ij} = 1.$$

Věta. Při výše uvedeném označení platí

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}.$$

Důkaz. Pro každé pevné i a r platí

$$\min_j a_{ij} \leq a_{ir}, \quad a_{ir} \leq \max_s a_{sr}.$$

takže

$$\min_j a_{ij} \leq \max_s a_{sr}.$$

Tento vztah platí pro každé r , tedy i pro to, pro které nabývá pravá strana své nejmenší hodnoty. Dostáváme tedy

$$\min_j a_{ij} \leq \min_r \max_s a_{sr}.$$

To ale platí i pro to i , pro které nabývá levá strana své největší hodnoty. Odtud

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_r \max_s a_{sr}.$$

Změnou indexů r, s za j, i na pravé straně dostáváme tvrzení věty.

Prvek a_{pq} nazveme sedlovým prvkem matice $\mathbf{M}$, jestliže současně platí

$$\text{a) } a_{iq} \leq a_{pq} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\text{b) } a_{pj} \geq a_{pq} \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, n.$$

Sedlový prvek matice $\mathbf{M}$ — pokud ovšem existuje — je tedy největší ve svém sloupci a nejmenší ve svém řádku.

Věta. Nutná a postačující podmínka k tomu, aby platilo

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = C,$$

je, aby matice $\mathbf{M}$ měla sedlový prvek. Je-li a_{pq} sedlový prvek matice $\mathbf{M}$, platí $C = a_{pq}$.

Důkaz. Nejprve dokážeme postačitelnost podmínky. Jestliže existuje sedlový prvek a_{pq} matice $\mathbf{M}$, dostáváme z jeho definice

$$\max_i a_{iq} \leq a_{pq}, \quad \min_j a_{pj} \geq a_{pq},$$

takže platí

$$\max_i a_{iq} \leq a_{pq} \leq \min_j a_{pj}.$$

Odtud vyplývá

$$\min_j \max_i a_{ij} \leq a_{pq} \leq \max_i \min_j a_{ij}. \quad (3)$$

Porovnáme-li získaný výsledek s tvrzením předchozí věty, je tím dokázána postačitelnost podmínky. Nyní dokážeme její nutnost. Označme p to číslo z $1, 2, \dots, m$, pro něž $\min_j a_{ij}$ nabývá své největší hodnoty. Analogicky q nechť značí to číslo z $1, 2, \dots, n$, pro něž $\max_i a_{ij}$ nabývá své nejmenší hodnoty. Platí tedy

$$\min_j a_{pj} = \max_i \min_j a_{ij}, \quad \max_i a_{iq} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Podle předpokladu věty se pravé strany sobě rovnají. Proto se sobě rovnají i strany levé, čili platí

$$\min_j a_{pj} = \max_i a_{iq}.$$

Poněvadž platí $\min_j a_{pj} \leq a_{pq}$, vyplývá odtud, že $\max_i a_{iq} \leq a_{pq}$. Odtud dostáváme $a_{iq} \leq a_{pq}$. Zbývající část se dokáže obdobně. Z relace (3) plyne i druhé tvrzení naší věty.

Veličina C se nazývá čistá cena hry.

Příklad. Necht

$$M = \begin{vmatrix} 0, 2, & 0 \\ -1, 3, & -2 \end{vmatrix}$$

Tato matice má dva sedlové prvky, a to $a_{11} = a_{13} = 0$.

Hráč A bude tedy volit strategii A_1 , hráč B kteroukoli ze strategií B_1, B_3 .

2.2. Smíšené strategie a princip minimaxu

V předchozím paragrafu jsme uvedli a dokázali věty o hrách, jejichž matice mají sedlový prvek. Všimneme-li si matice hry, která nemá sedlový prvek (např. 1.2), dojdeme k závěru, že nemůžeme při všech partiích užívat stále stejné strategie, protože by to soupeř vystihl a využil. Zřejmě je výhodnější v tomto případě při každé partii strategii nějak náhodně měnit.

Předpokládejme tedy, že hráč A volí strategii A_i s pravděpodobností u_i , $i = 1, 2, \dots, m$, hráč B strategii B_j s pravděpodobností v_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Poněvadž jde o pravděpodobnosti, musí u_i, v_j být nezáporná a splňovat

$$\sum_{i=1}^m u_i = \sum_{j=1}^n v_j = 1.$$

Uspořádanou m -tici pravděpodobností $U = (u_1, \dots, u_m)$ nazveme smíšenou strategií hráče A. Uspořádanou n -tici $V = (v_1, \dots, v_n)$ nazveme smíšenou strategií hráče B. Budiž K množina všech možných smíšených strategií U hráče A; analogicky budiž L množina všech smíšených strategií V hráče B.

Čistá strategie je taková smíšená strategie, kde jedna z pravděpodobností je rovna jedné a ostatní jsou rovny nule.

Protože oba hráči volí své strategie nezávisle na sobě, hráč A dostane každou částku a_{ij} s pravděpodobností $u_i v_j$. Proto průměrná výhra hráče A („střední hodnota jeho výhry“) je rovna

$$f(U, V) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} u_i v_j.$$

Když hráč A volí strategii U , má zaručenu průměrnou výhru nejméně $\min_{V \in L} f(U, V)$ jestliže toto minimum existuje. Z množiny K si hráč A může vybrat tu strategii, která mu zaručí dosažení průměrné výhry $\max_{U \in K} \min_{V \in L} f(U, V)$. Podobné úvahy lze uvést i pro hráče B.

Lze dokázat věty analogické větám z 2.1. Jejich důkazy však již nejsou tak jednoduché.

Fundamentální význam má

věta o minimaxu. Při výše uvedeném označení veličiny

$$C_1 = \max_{U \in K} \min_{V \in L} f(U, V) \quad \text{a} \quad C_2 = \min_{V \in L} \max_{U \in K} f(U, V)$$

existují a jsou si rovny. Veličinu $C = C_1 = C_2$ pak nazýváme cenou hry.

Hráč A tedy může volit takovou strategii U , že jeho průměrná výhra bude nejméně rovna C bez ohledu na to, jakou strategii zvolí hráč B. Hráč B může však volit takovou strategii V ,

že zabrání tomu, aby průměrná výhra hráče A byla větší než C . Tyto strategie U a V se nazývají optimální. Nalezení optimálních strategií U a V a ceny hry C se nazývá řešení dané hry $m \times n$.

2.3. Řešení her typu 2×2 a $2 \times n$; geometrická interpretace

Hra typu 2×2 je dána maticí

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Nechť tato matice nemá sedlový prvek (jinak bychom užili výsledků 2.1.). Pak je zřejmé, že optimální strategie hráčů nebudou čisté.

Hledáme tedy strategie $U = (u_1, u_2)$ a $V = (v_1, v_2)$ a cenu C , které jsou řešením hry. Musí samozřejmě platit

$$u_2 = 1 - u_1, \quad v_2 = 1 - v_1. \quad (4)$$

Lze snadno dokázat, že za uvedených předpokladů hráč A dosáhne průměrné výhry C , i když protivník volí čistou strategii B_1 anebo B_2 , používá-li A své optimální strategie. Odtud plynou rovnice

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 &= C \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 &= C \end{aligned} \quad (5)$$

Spolu s první částí (4) máme tři rovnice o třech neznámých. Snadno vypočteme, že

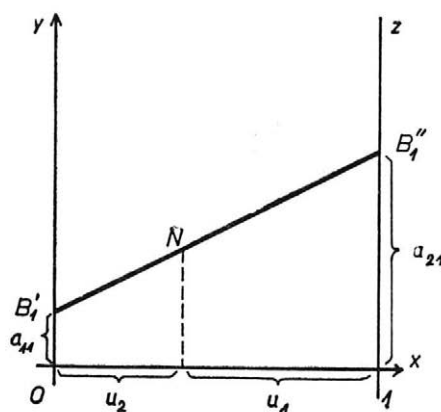
$$u_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Dále vypočteme $u_2 = 1 - u_1$ a z (5) určíme cenu hry C .

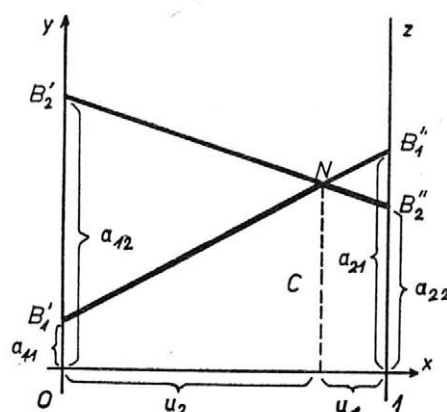
Analogicky bychom mohli též odvodit vzorce pro v_1 a v_2 . Jinak ovšem lze zaměnit hráče A a B a současně matici $\mathbf{M}$ maticí $-\mathbf{M}$, a pak přímo použít odvozených výsledků.

Řešení příkladu z 1.2. je: $u_1 = u_2 = v_1 = v_2 = 0,5$

$$(u_1 = \frac{1+1}{1+1+1+1}); \quad C = 0 \quad (C = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0).$$



1.



2.

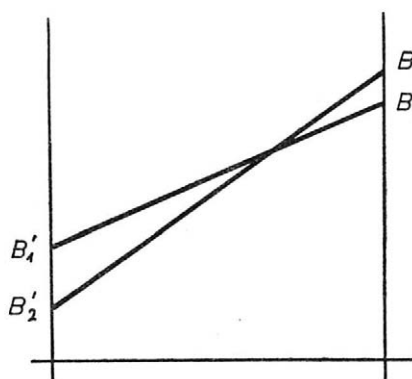
Hry typu 2×2 mají jednoduchou geometrickou interpretaci. Na ose x vezměme interval $\langle 0,1 \rangle$ – viz obr. 1. Jeho levý konec ($x = 0$) znázorňuje strategii A_1 , pravý konec ($x = 1$) strategii A_2 . Označme z rovnoběžku s osou y , která prochází pravým koncem uvedené úsečky. Na osu y nanášíme výhru při strategii A_1 , na z výhru při strategii A_2 . Při strategii B_1 našeho protivníka takto sestrojíme body B'_1 a B''_1 , které spojíme přímkou.

Když užijeme strategii (u_1, u_2) a protivník B_1 , pak naše střední výhra bude rovna $a_{11}u_1 + a_{12}u_2$ a lze ji v grafu zakreslit jako bod M ležící na úsečce $B'_1 B''_1$, který x -ovou souřadnici má rovnou u_2 .

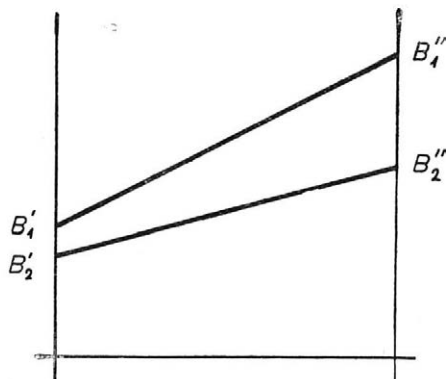
Podobně na y a na z určíme B'_2 a B''_2 , které odpovídají výhrám hráče A při protivnickové strategii B_2 .

Hledejme optimální strategii pro hráče A, tj. takovou, při které minimální střední výhra hráče A nabývá maxima. Proto sestrojíme graf minima střední výhry (na obr. 2 je znázorněn silnou čarou). Bod N , v němž minimální střední výhra dosahuje svého maxima, určuje smíšenou strategii hráče A, tj. pravděpodobnosti u_2, u_1 , i cenu hry, jak je patrné na obr. 2.

V případě, že matice hry má sedlový prvek, nabývá minimální střední výhra svého maxima až na některé z přímk y nebo z , jak je ukázáno na obr. 3 a 4.



3.



4.

Analogicky lze graficky řešit též hry typu $2 \times n$ (resp. $m \times 2$).

2.4. Dominující strategie

Zkoumáme-li některé matice her, můžeme již na první pohled určit, že některé čisté strategie budou v optimální strategii vystupovat s koeficientem 0, tj. že jich hráč nebude vůbec používat.

Nechť

$$M = \begin{vmatrix} 1, & 7, & 2 \\ 6, & 2, & 7 \\ 5, & 1, & 6 \end{vmatrix}$$

Je intuitivně zřejmé, že hráč A nebude používat strategii A_3 , neboť mu v žádném případě nepřinese větší výhru než strategii A_2 ; všechny prvky druhého řádku jsou totiž větší než jim odpovídající prvky třetího řádku (dále jen: druhý řádek je větší než třetí; obdobného rčení

použijeme i pro sloupce). Řekneme, že strategie A_3 je dominována strategií A_2 , nebo že A_2 je dominující vůči A_3 . Stačí nám tudíž nalézt řešení hry s maticí

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1, & 7, & 2 \\ 6, & 2, & 7 \end{vmatrix}$$

Přitom cena hry se zřejmě nezměnila. Poněvadž třetí sloupec je větší než první, nebude hráč B užívat strategie B_3 . Omezíme se tedy na hru s maticí

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1, & 7 \\ 6, & 2 \end{vmatrix}$$

Tato hra má podle 2,3. řešení $(2/5, 3/5)$, $(1/2, 1/2)$, $C = 4$. (Cena hry není nulová, proto hra není spravedlivá.) Proto původní hra s maticí M má řešení $U = (2/5, 3/5, 0)$, $V = (1/2, 1/2, 0)$, $C = 4$.

Věta obecné platnosti: Je možno vynechat strategii, které odpovídá řádek menší, než je nějaká lineární kombinace s nezápornými koeficienty (jejichž součet je 1) ostatních řádků. Obdobně lze vynechat strategii, které odpovídá sloupec větší než nějaká lineární kombinace s nezápornými koeficienty (jejichž součet je 1) ostatních sloupců. Takto získané hře budeme říkat redukovaná. Optimální strategie původní hry se dostanou z optimálních strategií redukované hry tak, že na místa, která odpovídají vynechaným řádkům a sloupcům, přidáme nuly. Cena hry původní je rovna ceně hry redukované.

Důkaz je uveden ve (3).

2.5. Řešení her typu $m \times n$ metodami lineárního programování

Má-li matice hry sedlový prvek nebo podaří-li se ji redukovat na matici typu 2×2 , postupujeme při řešení podle metod vyložených v odst. 2.1 a 2.3.

Nechť obecně máme hru s maticí (1). Necht $U = (u_1, \dots, u_m)$ je hledaná optimální strategie hráče A; budiž C cena hry. Optimální strategie U se vyznačuje tím, že zaručuje hráči A průměrnou výhru nejméně C , ať hráč B volí jakoukoli strategii, speciálně ať volí čistou strategii $B_1, \dots, B_n$. Odtud dostáváme podmínky

$$u_1 a_{11} + \dots + u_m a_{m1} \geq C$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_1 a_{1n} + \dots + u_m a_{mn} \geq C.$$

Nechť $C > 0$. Není-li tato podmínka splněna, pak stačí přičíst ke všem prvkům matice M dostatečně velkou kladnou konstantu N . Lze snadno dokázat, že takto získáme hru, která má cenu o N vyšší než hra původní, přičemž optimální strategie obou hráčů zůstanou nezměněny. Každou z nerovností můžeme tedy vydělit číslem $C > 0$. Označme $u_i/C = t_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Dostáváme

$$t_1 a_{11} + \dots + t_m a_{m1} \geq 1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t_1 a_{1n} + \dots + t_m a_{mn} \geq 1.$$

Je jasné, že $t_i \geq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, m$. Z podmínky $\sum_{i=1}^m u_i = 1$ dostáváme

$$L = \sum_{i=1}^m t_i = 1/C.$$

Průměrná výhra C bude maximální tehdy a jen tehdy, bude-li L minimální. Hledáme tedy m -tici nezáporných čísel $t_1, \dots, t_m$, která splňuje výše uvedené podmínky a minimalizuje lineární formu L . Jak známo, jde o problém lineárního programování.

(Dokončení v příštím čísle)

VI. Teorie her (pokračování)

3. DALŠÍ METODY PRO ŘEŠENÍ HER

3.1. Sklizeň cukrové řepy

Protože jde o úvod do problematiky teorie her s ohledem na aplikace v zemědělství, objasníme některé další metody na příkladě, aniž bychom pro ně rozvíjeli obecnou teorii.

JZD se rozhoduje, zda má začít sklizeň cukrové řepy hned (strategie A_1) nebo zda s ní má ještě měsíc počkat (strategie A_2). Bude-li totiž hezké počasí, řepa získá na váze a bude vyšší hektarový výnos. Je zde však riziko, že náhle nastanou mrazy a JZD nestačí všechnu řepu sklídit (nehledě na ztráty na cukernatosti). Protivníkem je zde tedy příroda, která má rovněž dvě strategie: B_1 – hezky, B_2 – mrazy. Výhrou budeme rozumět hektarový výnos v metrických centech. Matice hry bude vypadat např. takto:

	B_1	B_2
A_1	280	280
A_2	300	140

Vidíme, že matice má sedlový prvek 280 v prvním řádku a druhém sloupci, takže minimaxovým řešením by byly čisté strategie A_1 , B_2 , cena hry by byla 280.

3.2. Metoda minimaxu středních hodnot ztrát zisku

Uvažujme dále takto: Nejvyšší výnos, jehož je možno dosáhnout, činí 300 q/ha. JZD může tedy místo původní matice hry uvažovat jinou matici, kde budou zaznamenány ztráty na výnosu (= ztráty zisku) v ostatních situacích. Dostane se matice

	A_1	A_2
B_1	20	0
B_2	20	160

Označme ztrátu zisku při akci A_i , je-li skutečný stav přírody B_j , jako z_{ij} .

Zemědělci mají k dispozici od meteorologů předpověď počasí, takže jsou o strategiích přírody „zčásti“ informováni. „Zčásti“ proto, že meteorologická předpověď nemusí vždy vyjít. Předpokládejme, že jsou k dispozici předpovědi meteorologů z minulých let, takže máme přehled, ve kterých případech byly správné a ve kterých ne. Níže je uveden takový přehled za minulých 68 let (data jsou uměle zkonstruována!).

Meteorologická předpověď

		hezky	mrazy	celkem	skutečnost	(7)
Skutečný stav přírody	hezky	32	8	40		
	mrazy	7	21	28		
celkem		39	29			

předpověď

Tabulku čteme takto: Ve 32 případech z celkového počtu 68 zněla předpověď „hezky“ přičemž bylo opravdu hezky apod. Jestliže budeme aproximovat pravděpodobnosti relativními četnostmi, máme odtud toto rozdělení pravděpodobnosti:

Meteorologická předpověď

		hezky	mrazy
Při skutečném stavu přírody	hezky	0,80	0,20
	mrazy	0,25	0,75

Např.: $0,80 = 32 : 40$.

Sestavme tabulku strategií zemědělců (označíme je písmenem S s indexem):

		Strategie			
		S_1	S_2	S_3	S_4
Předpověď	hezky	A_1	A_1	A_2	A_2
	mrazy	A_1	A_2	A_1	A_2

Například strategie S_3 říká: Při předpovědi „hezky“ udělejme akci A_2 , při předpovědi „mrazy“ udělejme akci A_1 . Je patrné, že strategie S_1 a S_3 zcela ignorují předpověď počasí.

Tyto strategie je třeba ocenit. Proto vypočteme střední ztráty zisku

$$L(B_i, S_k) = \sum_{j=1}^2 z_{ij} \cdot P(A_j/B_i, S_k), \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

kde: B_i = stav přírody,

S_k = příslušná strategie

Stav přírody	Ztráty		Pravděpodobnosti akcí		Střední hodnoty ztrát
	A_1	A_2	A_1	A_2	
$S_1 = (A_1, A_1)$					
B_1	20	0	1	0	20
B_1	20	160	1	0	20
$S_2 = (A_1, A_2)$					
B_1	20	0	0,80	0,20	16
B_2	20	160	0,25	0,75	125*)
$S_3 = (A_2, A_1)$					
B_1	20	0	0,20	0,80	4
B_2	20	160	0,75	0,25	55
$S_4 = (A_2, A_2)$					
B_1	20	0	0	1	0
B_2	20	160	0	1	160

*) Výpočet hodnoty 125: $0,25 \cdot 20 = 5$

$$0,75 \cdot 160 = 120$$

$$120 + 5 = 125$$

Výsledky shrneme do tabulky středních hodnot ztrát zisku:

		S_1	S_2	S_3	S_4
Stav přírody	B_1	20	16	4	0
	B_2	20	125	55	160

(8)

Kdybychom chtěli takto modifikovanou hru řešit minimaxovým pravidlem, bylo by řešení dáno čistými strategiemi B_2, S_1 , neboť prvek 20 na druhé řádce je sedlový. Tomuto způsobu řešení hry se říká metoda minimaxu středních hodnot ztrát zisku.

Výsledek bychom mohli interpretovat takto: Spolehlivost předpovědi není tak velká, aby vyrovnala možnou ztrátu na výnosu, a proto bez ohledu na předpověď třeba sklízet okamžitě.

3.3. Metoda minimaxu středních hodnot ztrát

Prostudujeme znovu matici ztrát zisku (6). Nastane-li situace B_2 (na což my nemáme vliv), pak vlastně za skutečnou ztrátu musíme považovat v případě akce A_1 nulu (neboť jsme u dělali nejsprávnější rozhodnutí), v případě akce A_2 $160 - 20 = 140$, neboť taková je skutečná ztráta způsobená akcí A_2 proti správné akci A_1 . Tím jsme dostali novou matici ztrát

	A_1	A_2
B_1	20	0
B_2	0	140

(9)

Nyní můžeme hledat minimaxové řešení střední hodnoty ztrát způsobem analogickým jako výše. Místo funkce $L(B_i, S_k)$ se zde bude objevovat tzv. riziková funkce

$$R(B_1, S_k) = L(B_1, S_k) - 0, \quad R(B_2, S_k) = L(B_2, S_k) - 20$$

Riziková funkce v našem případě bude vyjádřena tabulkou

	S_1	S_2	S_3	S_4
B_1	20	16	4	0
B_2	0	105	35	140

Je patrné, že lze vynechat strategii S_2 , neboť je dominována strategií S_3 . Minimaxové řešení této redukované hry grafickou metodou podle odst. 2.3. přenecháváme čtenáři.

3.4. Bayesovské strategie

Na základě tabulky (7) můžeme usoudit, že také obráceně lze podle předpovědi meteorologů odhadnout pravděpodobnost, že bude hezky, nebo že přijdou mrazy. Z tabulky (7) je odvozena tato tabulka:

Pravděpodobnost, že bude	Meteorologická předpověď	
	hezky	mrazy
hezky	0,83	0,28
mrazy	0,17	0,72

$$\text{Např.: } 0,83 = 32 : 39.$$

Zde uvedené pravděpodobnosti se nazývají aposteriorní. Pro úplnost poznamenávám, že v obecnějších případech je nutno počítat podle tzv. Bayesových vzorců — viz (1).

A) Předpokládejme, že předpověď meteorologů zněla „hezky“. Na základě tabulky ztrát zisku (6) vypočteme střední hodnotu ztrát zisku pro obě strategie hráče A:

A_1	A_2
20	27,20

$\begin{vmatrix} 20 & 0 \\ 20 & 160 \end{vmatrix}$ je matice ztrát zisku;

(např. $27,20 = 0.0,83 + 160.0,17$).

Podle Bayesova principu volíme tu strategii, která dává menší průměrnou (střední) ztrátu zisku. Zde to je strategie A_1 .

B) Jestliže předpověď zněla „mrazy“, zcela analogicky vypočteme střední hodnoty ztrát zisku:

A_1	A_2
20	115,2

Také v tomto případě zvolíme strategii A_1 .

Tyž Bayesův princip budeme teď aplikovat na matici ztrát (9).

A) Střední hodnoty ztrát při předpovědi „hezky“:

A_1	A_2
16,6	23,8

B) Střední hodnoty ztrát při předpovědi „mrazy“:

A_1	A_2
5,6	100,8

V obou případech dáme přednost strategii A_1 — sklízet okamžitě.

Data o spolehlivosti předpovědi jsou uměle vykonstruovaná. Je-li spolehlivost předpovědi větší, vyjdou ovšem na základě uvedených metod popřípadě jiné výsledky. Jiné výsledky také můžeme dostat při jiných výnosech, než které jsou uvedeny v odst. 3.1.

3.5. Porovnání jednotlivých metod

Je nutno říci, že je řada závažných námitek, zejména proti používání minimaxové metody. Tato metoda totiž nijak neumožňuje využít informace, kterou jsme získali o způsobu volby protivníkových strategií. Minimax by se mohl aplikovat v takových situacích, kdy máme proti sobě neobyčejně dobrého protivníka, který by rozhodně využil jakýchkoliv našich odchylek od optimální strategie. Ale ve většině případů — a to zejména ve hrách člověka s přírodou — tomu tak není. Není důvodu si představovat, že by příroda zlomyslně snížila teplotu pod bod mrazu jen proto, že zemědělci vyčkávají se sklizní na základě meteorologické předpovědi teplého počasí. V takovémto případě se hodí teorie minimaxu jen pro „nevyléčitelné pesimisty“. Stejně námítky lze uvést proti metodě minimaxu středních hodnot ztrát zisku a minimaxu středních hodnot ztrát.

Jistě správnější je užívat těch kritérií, která dovolují vhodně využít informace získané zkušenostmi a vědeckým výzkumem. Takovýmto kritériem je Bayesův princip. Proti němu bývá zpravidla namítáno, že někdy nejsou známy pravděpodobnosti, které v něm figurují. V našem případě jsme však viděli, že v zemědělských problémech můžeme někdy získat odhady těchto pravděpodobností zpracováním meteorologických údajů.

Jak je patrné z uváděných příkladů, v zemědělské ekonomice jsou předpoklady pro zvýšení výroby použitím teorie her, a jistě by nebylo správné úlohu teorie her podceňovat nebo dokonce ignorovat. Na druhé straně si však musíme být vědomi toho, že teorie her se nehodí na všechny možné problémy; musíme tedy její význam kriticky hodnotit a nepřeceňovat. Jak je ale známo, již sama řádná formulace problému často usnadní jeho řešení. A teorie her nutí pracovníky, aby si řádně rozmysleli, jaké akce je možno podniknout proti nepříznivým vlivům počasí apod., a jaký přínos pro hospodářství přináší každá z nich.

4. PŘÍKLADY

4.1. Problém farmářů v USA

Uvedeme nyní stručně jednu aplikaci teorie her v kapitalistické zemědělské výrobě. Příklad je publikován v (2). Šlo o tento problém: Farmáři, kteří pěstují rýži, se rozhodovali, zda mají zvýšit (a o kolik) osevní plochu rýže, aby si zabezpečili co nejmenší ztrátu v případě, kdyby cena rýže klesla. Z technických důvodů je možno zvýšit osevní plochu rýže nejvýše o 15 %; další zvyšování osevní plochy by si totiž vyžádalo značné investice. „Protivníkem“ farmářů byla vláda, která ceny stanoví. Kdyby šlo o skutečný „zápas“ farmářů a vlády, stanovilo by se optimální řešení pro obě strany takto: Vláda by nejvíc uškodila farmářům, kdyby snížila ceny za rýži na minimum. V takovém případě by ovšem farmáři dosáhli nejmenší ztráty, kdyby zvýšili osevní plochu rýže na maximum. Z dat, která jsou v (2) uvedena, opravdu toto řešení vyplývá, použijeme-li minimaxové metody.

Prakticky však není důvodu se domnívat, že by vláda snižovala cenu rýže stůj co stůj. Ceny se snižují v případě, že farmáři vyrobí rýže příliš mnoho; bude-li vyrobeno rýže málo, ceny spíše stoupnou. Jednoznačnou závislost ceny rýže na vyrobeném množství této plodiny ovšem nelze očekávat, neboť tvorba cen závisí nejen na produkci farem v USA, ale i na výši mezinárodních cen apod.

Bylo tedy odhadnuto rozložení pravděpodobností cen za předpokladu, že farmáři zvýší osevní plochu o p -procent pro různá p od 0 do 15. Z původní matice hry byla pak vypočtena za těchto předpokladů nová matice, které se říká vyrovnaná matice hry. Ta již neměla sedlový prvek. V (2) je uvedeno řešení metodou minimaxu i metodou minimaxu ztrát a dále řešení podle Laplaceova kritéria, které je jakousi modifikací kritéria Bayesova. Na základě Laplaceova kritéria vyšlo, že farmáři vůbec nemají zvyšovat osevní plochu rýže; první dvě metody daly smíšené strategie, podle kterých zvyšování osevních ploch se má dít jen s malými pravděpodobnostmi. Autor článku M. R. Langham v závěru však sám přiznává, že výsledky jsou založeny na mnoha předpokladech, z nichž některé mají víceméně intuitivní opodstatnění.

4.2. Pěstovat rané nebo pozdní brambory?

JZD se rozhoduje, zda má na pole nasázet rané brambory (strategie A_1), nebo pozdní brambory (strategie A_2). I když je výnos raných brambor nižší, jsou zato vykupovány za podstatně vyšší ceny. Je-li jaro chladnější, nelze rané brambory sklízet tak brzy, a tudíž cena mezitím poklesne. Na hektarový výnos má pochopitelně vliv i strategie přírody. Jaro může být teplé nebo chladné a srpen, který rozhoduje o sklizni pozdních brambor, může být buď příznivý (s vláhou), nebo nepříznivý (suchý). Strategie JZD, strategie přírody, hektarové výnosy a odpovídající ceny jsou uvedeny v této tabulce:

	Jaro	teplé		chladné	
	srpen	s vláhou	suchý	s vláhou	suchý
Rané brambory		120 Kčs 100 q	120 Kčs 100 q	80 Kčs 40 q	80 Kčs 40 q
Pozdní brambory		40 Kčs 200 q	40 Kčs 100 q	40 Kčs 150 q	40 Kčs 100 q

Matice hry je tedy

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	12 000	12 000	3200	3200
A_2	8 000	4 000	6000	4000

A) Řešení *minimaxovou metodou*. Matice hry má sedlový prvek 4000, kterému odpovídá strategie A_2 a strategie B_4 . Řešení je tedy dáno čistými strategiemi A_2 (pozdní brambory), B_4 (chladné jaro, suchý srpen). Cena hry je 4000 Kčs.

B) Řešení *Bayesovou metodou*. Necht v určité zemědělské oblasti mají jednotlivé strategie přírody tyto pravděpodobnosti (jsou uměle konstruované):

B_1	B_2	B_3	B_4
0,3	0,3	0,3	0,1

Střední hodnoty výhry budou v tomto případě dány tabulkou:

Strategie	Střední hodnota výhry
A_1	8480*)
A_2	5800**)

*) $8480 = 0,3 \cdot 12\,000 + 0,3 \cdot 12\,000 + 0,3 \cdot 3200 + 0,1 \cdot 3200$

**) $5800 = 0,3 \cdot 8\,000 + 0,3 \cdot 4\,000 + 0,3 \cdot 6000 + 0,1 \cdot 4000$

Podle Bayesova principu dáme přednost té strategii, která dává větší střední hodnotu výhry — a to bude strategie A_1 (rané brambory). Vidíme, že zde dává Bayesova metoda jinou odpověď než metoda minimaxu. Je tomu tak proto, že při výpočtech podle Bayesovy metody jsme použili informace o pravděpodobnostech různých strategií přírody.

Nesmíme ovšem zapomenout na předpoklady, za nichž jsme hru konstruovali a řešili: že jde o finanční efekt (a ne o zásobení na zimu!) a že rané brambory jsou sklizeny vždy co nejdříve, jak jen to je možné.

4.3. Sklízet obilí do panáků nebo dvoufázově?

Máme se rozhodnout, zda budeme sklízet žito do panáků (strategie A_1), nebo dvoufázově (strategie A_2). Příroda má tři strategie: B_1 — bude hezky, B_2 — bude vlhké počasí, B_3 — nastane deštivé počasí. Je známo, že náklady na sklizeň obilí do panáků činí 1200 Kčs na hektar, kdežto na dvoufázovou sklizeň jen 600 Kčs na hektar. Naproti tomu však nepříznivé počasí neohroží obilí v panákách tolik, jako obilí ležící na zemi; zejména může ohrozit kvalitu obilí, a tak se chlebové obilí může změnit v krmné, které má samozřejmě i menší cenu v Kčs. I ztráty závisí nejen na způsobu sklizně, ale i na počasí. Zde jsou data potřebná k sestavení matice hry (výnosy i náklady vztahujeme na 1 ha).

Tabulka výnosů

	B_1	B_2	B_3
A_1	25 q	24 q	22 q
A_2	25 q	23 q	20 q
Ceny za 1 q v Kčs			
	B_1	B_2	B_3
A_1	140	140	140
A_2	140	80	80

	Náklady		
	B_1	B_2	B_3
A_1	1200	1200	1200
A_2	600	600	600

Matici hry vypočteme tak, že vypočteme pro každou možnost, jaký je čistý peněžní zisk z 1 ha:

	Matice hry		
	B_1	B_2	B_3
A_1	2300*)	2160	1880
A_2	2900	1240	1000

A) Řešení minimaxovou metodou. Matice má sedlový prvek 1880, který odpovídá optimálním čistým strategiím A_1 (sklizeň do panáků) a B_3 (deštivo).

B) Řešení Bayesovou metodou. Rozhodnutí o způsobu sklizně může být založeno na meteorologické předpovědi počasí. Předpokládejme, že se předpověď určité strategie přírody splňuje s pravděpodobností 0,8, zatímco každá z ostatních dvou možností se může objevit s pravděpodobností 0,1. Například je-li hlášeno vlhké počasí, pak s pravděpodobností 0,1 bude hezky, s pravděpodobností 0,8 bude skutečně vlhké počasí a s pravděpodobností 0,1 bude počasí deštivé (rozložení pravděpodobností je zkonstruováno uměle).

Sestavíme tabulku středních hodnot zisku (= výhry) pro každou ze tří možných předpovědí:

Tabulka středních hodnot zisku při předpovědi „hezky“

	zisk			střední hodnota zisku
	B_1	B_2	B_3	
pravděpodobnosti	0,8	0,1	0,1	
A_1	2300	2160	1880	2244**)
A_2	2900	1240	1000	2544

Tabulka středních hodnot zisku při předpovědi „vlhké počasí“

	zisk			střední hodnota zisku
	B_1	B_2	B_3	
pravděpodobnosti	0,1	0,8	0,1	
A_1	2300	2160	1880	2146
A_2	2900	1240	1000	1382

Tabulka středních hodnot zisku při předpovědi „deštivé počasí“

	zisk			střední hodnota zisku
	B_1	B_2	B_3	
pravděpodobnosti	0,1	0,1	0,8	
A_1	2300	2160	1880	1950
A_2	2900	1240	1000	1214

*) $2300 = 25 \cdot 140 - 1200$

**) $2244 = 0,8 \cdot 2300 + 0,1 \cdot 2160 + 0,1 \cdot 1880$

Podle Bayesova principu se tedy rozhodneme takto: Při předpovědi „hezky“ použijeme strategii A_2 — sklízet dvoufázově, při předpovědích „vlhké počasí“ i „deštivo“ použijeme strategii A_1 — sklizeň do panáků.

Tyto závěry ovšem děláme za předpokladu, že je nutno sklízet obilí za každou cenu, ať jsou meteorologické zprávy jakékoli.

4.4. Kukuřice nebo krmná směska?

Zemědělci mají možnost zabezpečit krmivo pro dobytek buď tím, že nasijí kukuřici (strategie A_1), nebo tím, že nasijí krmnou směsku (strategie A_2). Je-li rok teplý s počasím spíše sušším (strategie přírody B_1), je výnos kukuřice podstatně větší než výnos krmné směsky. Když je ale rok chladný s vlhkým počasím (strategie B_2), pak výnos kukuřice, zejména v podhorských oblastech, hluboko klesne a je menší než výnos směsky, pro kterou naopak je vlhké počasí příznivé. Pro kterou strategii se mají zemědělci rozhodnout? Naskytá se také možnost část plochy osít kukuřicí a část krmnou směskou. V jakém poměru je však třeba sít tyto dvě plodiny, abychom byli zajištěni proti jakékoli strategii přírody? Pro zjednodušení zanedbáme náklady na hnojení apod.

Matice hry obsahuje hektarové výnosy plodin v q v jednotlivých případech:

	B_1	B_2
A_1	500 q	200 q
A_2	250 q	350 q

A) *Minimaxové řešení*: Podle odst. 2.3 vypočteme, že optimální smíšená strategie pro zemědělce je (0,25; 0,75).

$$u_1 = \frac{350 - 250}{500 + 350 - 200 - 250} = \frac{1}{4},$$

$$u_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$C = 500 \cdot \frac{1}{4} + 250 \cdot \frac{3}{4} = 312,5$$

Zde ji můžeme interpretovat takto: Osijeme-li čtvrtinu plochy kukuřicí a tři čtvrtiny plochy krmnou směskou, zajišťujeme si tím 312,5 q píce (což je cena hry) bez ohledu na to, zda příroda použije strategii B_1 nebo B_2 . Když se od uvedeného poměru odchýlíme, riskujeme, že nás příroda „zaskočí“ a hektarový výnos bude menší než 312,5 q.

B) *Řešení Bayesovou metodou*: Předpokládejme, že obě strategie přírody jsou stejně pravděpodobné, tj. $P(B_1) = P(B_2) = 0,5$ (umělá data). Tabulka středních hodnot zisku pak bude

A_1	350
A_2	300

V tomto případě bychom dali přednost strategii A_1 , tj. raději bychom silí kukuřici.

5. ZÁVĚR

Cílem této práce bylo seznámit pracovníky v zemědělství s možnostmi použití teorie her v jejich praxi. Aby byl výklad co nejsrozumitelnější, byly používané metody objasňovány na příkladech, které se při běžném rozhodování mohou v zemědělství objevit. S tím souvisí i značné zjednodušení konfliktních situací. Při skutečných aplikacích by bylo třeba vzít v úvahu, že příroda má k dispozici více strategií, než kolik jich bylo v našich příkladech uváděno. Nejsou přece leta jen s počasím vysloveně suchým nebo vysloveně deštivým, počasí může být i někde mezi těmito dvěma krajními možnostmi.

Také zemědělci mají zpravidla k dispozici více strategií. V příkladu o sklizni obilí by si zemědělci mohli vybírat např. mezi těmito alternativami: sklizeň samovazem, kombajnem, dvoufázově a třífázově.

Užitek, který zemědělci v různých situacích budou mít, nelze někdy oceňovat jen finančními částkami, ale je nutno přihlídnout k tomu, jaký užitek z jejich rozhodnutí bude mít celý stát.

Úvahy a výpočty se budou zpravidla lišit podle polohy polí. V různých oblastech dávají pole i při stejném počasí různý výnos. Mimoto je nutno vzít v úvahu, že i počasí závisí na tom, ve které oblasti pole je.

Musíme dát pozor i na interpretaci výsledků. Dostaneme-li nějaký závěr ať už na základě minimaxu nebo podle Bayesovy metody, budeme dosahovat střední ceny hry (resp. střední hodnotu zisku) zpravidla v takové formě, že se jí bude blížit průměrný výnos (zisk), počítaný z mnoha partií hry, sehraných podle uvedené úlohy.

V zemědělství se nesmí zapomenout ani na to, že nelze na jednom poli pěstovat plodiny v libovolném pořadí. Tento fakt v konkrétních případech znamená jistá omezení ve strategiích zemědělců.

Literatura

- (1) GNEDENKO, B. V.: Kurs teorii verojatnostej. Moskva 1954.
- (2) LANGHAM, M. R.: Game theory applied to rice farmers. Journ. of Farm Economics, sv. 45 (1963) č. 1, s. 151—162.
- (3) MAK-KINSI, Dž.: Vvedenijs v teoriju igr. Moskva 1960.
- (4) NEUMANN, J. von, MORGENSTERN O.: Theory of games and economic behavior. 2nd ed., Princeton — Princeton University Press 1947.

OBSAH PŘÍLOHY

MATEMATICKÉ METODY V ZEMĚDĚLSTVÍ

V ROCE 1966

V příloze „Matematické metody v zemědělství — stručný kurs pro zemědělské ekonomy“, vyšlo v letošním roce šest kapitol. Jak známo, tento kurs byl stanoven na dva roky, takže v roce 1966 bude dokončen. Také v tomto roce se počítá s tím, že obecné zásady budou aplikovány pro potřeby našeho zemědělství i zemědělských podniků. Byli bychom velmi rádi, kdybyste nám nyní po skončení prvního roku našeho kursu sdělili své připomínky k dosavadním materiálům, zejména, potřebujete-li k některým kapitolám podrobnější vysvětlení apod., a dále event. návrhy pro druhý ročník. Své připomínky a návrhy zašlete na adresu: Redakce „Zemědělská ekonomika“ Praha 2 - Vinohrady, Slezská ulice č. 7.

V příštím roce jsou do plánu zařazeny tyto kapitoly:

- **Základní rysy a některé možnosti aplikace teorie front**
- **Meziodvětvová analýza**
- **Matematické metody řízení**
- **Matematicko-ekonomické rozborů**
- **Nomografie**
- **Výpočetní technika**

Dále se ještě uvažuje o zařazení kapitoly o programování na počítači MINSK 22, který bude v roce 1966 instalován ve Výzkumném ústavu zemědělské ekonomiky v Praze.

PŘÍLOHA ČASOPISU ZEMĚDĚLSKÁ EKONOMIKA

Vývoj výroby některých zemědělských produktů v ČSSR

Druh	Měrné jedn.	Výroba v natur. jednotkách v roce					
		1936	1955	1962	1963	1964	1965 ¹⁾
Na 1 hektar zemědělské půdy							
Pšenice	kg	187,8	204,2	228,3	246,6	256,3	278,8
Ječmen	kg	130,9	177,1	243,4	226,2	200,2	196,5
Zelenina	kg	130,4	163,1	141,1	171,1	170,6	148,0
Cukrovka	kg	613,5	850,5	807,0	1120,0	1047,3	842,0
Brambory	kg	1320,6	1082,1	694,7	908,9	1072,9	587,7
Ovoce a vinné hrozny	kg	79,7	75,7	48,5	70,0	69,0	41,5
Jatečná zvířata celkem ²⁾	ž. v.	89,6	116,2	151,9	151,4	162,7	171,7
z toho:	kg						
jatečný skot vč. telat	ž. v.	49,1	43,3	59,4	57,3	61,7	64,6
	kg						
jatečná prasata ³⁾	ž. v.	44,3	89,1	110,8	113,4	121,7	131,9
jatečná drůbež ³⁾	kg	8,0	10,8	14,4	15,1	16,7	15,4
Mléko kravské	l	611,2	472,1	493,6	479,0	511,5	533,3
Vejce ³⁾	ks	335,4	414,1	515,6	542,0	581,4	606,2
Na 1 obyvatele							
Pšenice	kg	101	113	119	127	130	140
Ječmen	kg	71	98	126	116	102	99
Zelenina	kg	70	90	73	88	87	74
Cukrovka	kg	331	470	419	575	532	424
Brambory	kg	712	598	361	466	545	296
Ovoce a vinné hrozny	kg	43	42	25	36	35	21
Jatečná zvířata celkem ²⁾	ž. v.	48	64	79	78	83	86
z toho:	kg						
jatečný skot vč. telat	ž. v.	26	24	31	29	31	32
	kg						
jatečná prasata	ž. v.	17	35	41	41	44	47
jatečná drůbež	kg	3	4	5	6	6	6
Mléko kravské	l	330	261	256	246	260	268
Vejce	ks	131	161	190	198	211	218

1) předběžné výsledky

2) jatečný skot, telata, prasata, ovce, kozy, koně, drůbež

3) na 1 hektar orné půdy

Vývoj výroby některých rostlinných výrobků v jednotlivých krajích na 1 hektar zemědělské půdy

Druh	Rok	Vývoj výroby v kg na 1 hektar zemědělské půdy v kraji									
		Středo- český	Jihočeský	Západo- český	Severo- český	Východo- český	Jihomo- ravský	Severo- moravský	Západo- slovenský	Středo- slovenský	Východo- slovenský
Pšenice	1960	374,5	133,0	180,6	240,5	274,0	212,2	200,7	265,8	85,9	111,7
	1961	392,7	151,6	194,2	240,8	263,8	285,4	241,5	304,2	105,3	106,2
	1962	343,8	153,0	195,7	182,9	272,2	261,6	234,2	287,3	133,6	174,7
	1963	454,8	193,2	248,0	276,8	331,2	327,1	292,6	198,2	125,5	79,1
	1964	372,9	193,1	183,3	177,6	334,8	386,3	308,7	329,7	99,6	108,1
Ječmen	1960	328,8	100,0	152,2	239,9	176,7	341,3	204,4	426,3	123,8	178,5
	1961	299,3	94,7	146,0	208,0	156,5	305,0	198,0	369,1	48,3	168,8
	1962	371,0	98,6	153,9	236,6	200,7	320,0	213,7	402,0	132,0	190,9
	1963	314,9	117,7	169,1	192,4	179,5	291,3	211,6	370,6	137,3	173,0
	1964	262,7	122,1	124,3	143,3	180,6	298,1	218,9	334,7	92,0	118,9
Brambory	1960	758,7	923,1	711,0	441,3	932,8	992,4	617,2	392,7	627,1	597,7
	1961	563,0	1089,3	650,6	308,7	929,6	1086,2	826,0	302,6	757,6	782,9
	1962	671,7	1047,3	753,6	466,4	991,5	965,5	561,9	278,1	514,4	765,4
	1963	946,8	1631,7	1139,7	525,5	1261,6	1241,7	776,4	327,2	686,7	748,4
	1964	1099,2	1833,1	1331,8	452,9	1534,9	1585,5	1221,1	318,5	722,6	841,4
Cukrovka	1960	2935,5	118,1	205,8	1314,8	1596,6	1738,2	1276,2	1646,4	122,0	252,6
	1961	2330,2	104,6	176,9	1194,2	1206,3	1434,2	1172,4	1348,7	121,9	235,5
	1962	1759,2	72,4	107,0	952,8	983,5	1340,3	966,9	1198,9	122,6	271,6
	1963	2424,5	69,4	171,0	1225,1	1447,4	1686,8	1364,2	1822,0	209,2	311,5
	1964	2179,2	101,6	133,1	756,1	1569,5	1732,3	1476,6	1497,4	190,5	309,0
Zelenina	1960	155,1	62,1	48,9	140,6	192,4	188,4	89,0	216,1	56,2	113,9
	1961	151,0	51,4	54,8	149,6	170,9	172,7	95,7	195,6	59,2	93,1
	1962	146,6	19,3	53,8	163,0	145,8	166,8	111,6	208,4	54,0	90,3
	1963	160,0	36,5	68,2	171,3	188,6	217,9	154,7	254,1	110,7	103,1
	1964	153,3	39,9	74,6	169,1	204,6	230,0	177,6	250,7	116,0	91,9
Ovoce a vinné hrozny	1960	205,1	75,5	79,4	179,3	129,3	193,9	146,0	113,8	53,6	73,8
	1961	98,8	24,5	26,8	89,0	64,7	131,7	74,9	127,2	41,7	66,4
	1962	58,9	13,6	14,3	79,6	40,8	85,2	46,9	69,0	15,2	32,9
	1963	113,8	23,6	27,5	103,2	67,2	106,8	71,5	100,6	25,8	61,1
	1964	86,1	14,2	15,8	67,0	59,9	104,4	99,1	117,1	24,3	48,4

Vývoj výroby hlavních živočišných produktů v jednotlivých krajích na 1 hektar zemědělské půdy

Druh	Rok	Vývoj výroby na 1 hektar zemědělské půdy v kraji									
		Středo- český	Jiho- český	Západo- český	Severo- český	Výcho- dočeský	Jihomo- ravský	Severo- moravský	Západo- slovenský	Středo- slovenský	Východo- slovenský
Jatečné zvířata celkem ¹⁾ v kg ž. v.	1960	167,7	142,4	122,5	129,9	165,1	178,4	152,0	168,3	103,1	89,0
	1961	172,0	145,1	126,0	137,1	169,2	181,6	148,1	184,4	106,0	87,1
	1962	176,3	154,0	134,6	143,2	174,4	189,9	157,5	176,5	105,8	86,6
	1963	182,6	150,1	129,5	138,2	176,9	191,9	142,2	183,3	102,8	100,2
	1964	196,5	164,0	139,8	154,9	188,0	195,4	162,1	198,2	104,0	102,1
z toho: jatečný skot vč. telat v kg ž. v.	1960	59,4	56,4	48,2	47,2	60,5	54,2	53,9	42,7	31,7	31,1
	1961	61,9	58,5	51,5	50,2	61,8	55,9	54,9	47,0	34,0	30,0
	1962	68,9	63,2	57,3	56,2	67,5	62,4	62,1	51,9	39,7	32,5
	1963	67,5	59,4	54,0	55,0	65,0	61,5	52,5	52,4	39,0	36,0
	1964	73,1	63,6	57,9	63,4	66,7	64,1	58,7	55,7	39,5	41,5
jatečná prasata v kg ž. v.	1960	90,0	68,1	56,9	68,3	82,8	101,4	76,8	106,5	50,0	46,7
	1961	92,6	68,6	59,4	73,9	86,0	105,2	75,2	117,7	54,9	45,7
	1962	90,0	71,9	61,9	72,8	85,1	107,4	76,8	107,4	52,6	43,9
	1963	94,3	73,2	62,6	70,1	90,4	110,2	71,7	109,8	51,5	52,1
	1964	101,8	82,1	69,3	77,3	97,5	115,9	84,6	118,6	53,7	49,0
jatečná drůbež v kg	1960	7,8	7,2	7,2	7,1	8,0	11,3	8,8	15,7	14,2	5,4
	1961	9,8	8,3	8,2	7,4	8,6	11,6	8,4	17,0	10,9	7,3
	1962	9,8	8,2	8,0	7,8	8,3	10,6	7,9	14,6	7,7	6,5
	1963	14,4	9,6	7,7	8,1	11,1	12,6	10,0	18,6	7,2	8,4
	1964	14,7	9,8	6,6	7,8	12,8	9,4	10,2	22,1	5,9	7,9
Mléko kravské v l	1960	578,1	552,9	471,8	442,4	697,4	554,4	628,7	460,0	405,1	355,1
	1961	631,3	600,7	537,0	487,9	745,6	579,0	646,0	445,3	390,7	316,9
	1962	581,3	580,3	510,0	478,6	701,9	528,0	608,1	395,0	375,4	300,1
	1963	574,7	563,7	455,3	460,6	701,2	506,3	563,3	377,6	356,7	306,4
	1964	605,5	626,9	524,7	454,7	759,4	562,8	619,5	405,9	363,4	300,4
Vejce v ks	1960	471,1	369,6	342,2	356,8	433,7	438,8	460,8	343,7	188,7	184,3
	1961	480,8	373,0	344,1	387,1	464,3	453,4	459,8	335,5	192,5	210,5
	1962	471,9	394,6	360,5	400,6	461,4	457,9	458,5	325,4	214,5	191,0
	1963	517,7	395,3	381,5	381,8	454,7	499,6	471,2	356,9	214,9	203,2
	1964	540,5	428,3	376,2	390,4	514,1	525,8	468,3	403,3	239,4	236,4

¹⁾ jatečný skot, telata, prasata, ovce, kozy, koně, drůbež

Výroba některých zemědělských produktů v jednotlivých krajích v roce 1960 a 1964 na 1 obyvatele

Druh	Rok	Výroba na 1 obyvatele v kraji									
		Středo- český	Jiho- český	Západo- český	Severo- český	Východo- český	Jihomo- ravský	Severo- moravský	Západo- slovenský	Středo- slovenský	Východo- slovenský
Pšenice v kg	1960 1964	213,1 207,6	126,3 179,9	115,2 116,5	89,5 66,7	157,0 192,5	106,0 187,0	71,4 105,1	157,6 182,9	60,6 60,6	91,9 77,1
Ječmen v kg	1960 1964	187,1 146,3	95,0 113,7	97,1 79,0	89,2 53,8	101,3 103,9	170,4 144,3	72,7 74,5	252,8 185,7	87,5 55,9	146,9 84,8
Zelenina v kg	1960 1964	88,3 85,4	58,9 37,2	31,2 47,4	52,3 63,5	110,3 117,6	94,1 111,3	31,7 60,5	128,2 139,1	39,7 70,5	93,7 65,5
Cukrovka v kg	1960 1964	1670,5 1213,3	112,2 94,6	131,3 84,6	489,2 283,9	914,8 902,4	868,0 838,3	454,2 502,6	976,4 830,8	86,1 115,8	207,9 220,3
Brambory v kg	1960 1964	431,7 612,0	876,6 1708,0	453,4 846,5	164,2 170,1	534,4 882,6	495,6 767,2	219,7 415,6	232,9 176,7	442,8 439,5	491,9 599,9
Ovoce a vinné hrozny v kg	1960 1964	116,7 48,0	71,7 13,3	50,6 10,0	66,7 25,2	74,1 34,4	96,8 50,5	51,9 33,7	67,5 65,0	37,9 14,8	60,7 34,5
Jatečná zvířata celkem ¹⁾ v kg ž. v.	1960 1964	95,4 104,5	135,2 152,8	78,2 88,9	48,3 58,2	94,6 108,1	89,1 94,8	54,1 55,2	99,8 110,0	72,8 63,3	73,3 72,8
z toho: jatečný skot vč. telat v kg ž. v.	1960 1964	33,8 40,7	53,5 59,2	30,7 36,8	17,6 23,8	34,7 38,3	27,1 31,0	19,2 20,0	25,3 30,9	22,4 24,0	25,6 29,6
jatečná prasata v kg ž. v.	1960 1964	51,2 56,7	64,6 76,5	36,3 44,0	25,4 29,0	47,4 56,1	50,6 56,1	27,3 28,8	63,2 65,8	35,3 32,6	38,5 35,0
jatečná drůbež v kg	1960 1964	4,4 8,2	6,8 9,1	4,6 4,2	2,6 2,9	4,6 7,4	5,6 4,5	3,1 3,5	9,3 12,3	10,0 3,6	4,4 5,6
Mléko kravské v l	1960 1964	329,0 337,1	525,0 584,1	300,9 333,5	164,6 170,7	399,6 436,6	276,8 272,4	223,7 210,9	272,8 225,2	286,1 221,1	292,2 214,2
Vejsce v ks	1960 1964	268,1 300,9	350,9 399,0	218,3 239,1	132,8 146,6	248,5 295,6	219,1 254,4	164,0 159,4	203,8 223,8	133,3 145,6	151,7 168,5